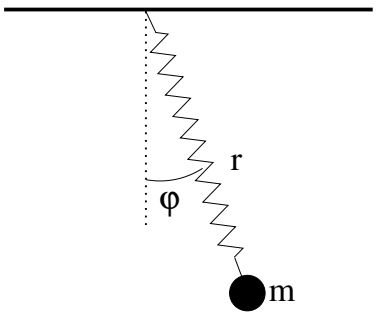
Übungen zur Mechanik (4) – Sommersemester 2012

Abgabe bis Donnerstag, 7.6.2012

Aufgabe 1 *Federpendel*

An einer masselosen Feder mit Federkonstante D schwinge die Masse m im homogenen Schwerefeld der Erde. Die Länge der unbelasteten Feder sei r_0.



a) Wählen Sie zunächst Polarkoordinaten (r, ϕ) als verallgemeinerte Koordinaten und berechnen Sie T und V.

b) Bestimmen Sie aus der Bedingung $\partial V/\partial r = 0$ und $\partial V/\partial \phi = 0$ die Gleichgewichtslage des Pendels. (Gibt es mehr als eine?)

c) Transformieren Sie die Variable r durch Verschiebung so, dass die neue Variable im Gleichgewicht den Wert 0 annimmt, und schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der neuen Variable und ϕ.

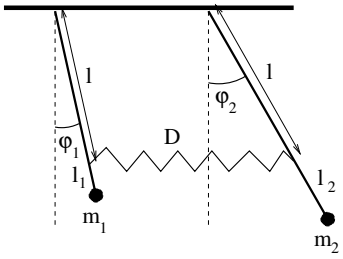
d) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen.

e) Betrachten Sie den Spezialfall, dass $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ ist. Wie lauten in diesem Fall die Bewegungsgleichungen und deren allgemeine Lösung? Um was für eine Bewegung handelt es sich?

f) Stellen Sie V näherungsweise als quadratische Form dar (Berechnung der zweiten Ableitungen). Unter welchen Einschränkungen lässt sich diese Darstellung anwenden?

Aufgabe 2 *Gekoppelte Pendel*

Zwei Pendel mit den Massen m_1 und m_2 und den Pendellängen l_1 und l_2 seien durch eine Feder der Federstärke D gekoppelt. Die Feder sei im Abstand l zu den Aufhängepunkten an den Pendeln befestigt (siehe Skizze) und befinde sich für $\phi_1 = \phi_2 = 0$ in der Ruhelage. Berücksichtigen Sie für die Dehnung der Feder nur die Auslenkung der Aufhängepunkte in x-Richtung.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

b) Drücken Sie das Potential V näherungsweise als quadratische Form in den Koordinaten ϕ_1 und ϕ_2 aus, indem Sie die in der Vorlesung definierte Matrix $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ berechnen.

c) Wie lauten damit die Bewegungsgleichungen in der Näherung kleiner Ausschläge? (Aus der Vorlesung: $\boldsymbol{\mathcal{T}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\mathcal{V}}\boldsymbol{q} = 0$)

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Ausschläge für den Spezialfall $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$.