Mit den Lagrange-Gleichungen erster Art erhalten wir $3N$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hinzu kommen k Zwangsbedingungen (k_1 holonome und k_2 differentielle). Für die Anwendung der Lagrange-Gleichungen erster Art ergibt sich folgende **Vorgehensweise**:

1. Wähle die verallgemeinerten Koordinaten und stelle die Zwangsbedingungen in differentieller Form auf.

2. Stelle die Lagrange-Funktion $L = T - V$ als Funktion aller $3N$ verallgemeinerten Koordinaten auf.

3. Berechne die $3N$ Lagrange-Gleichungen erster Art.

4. Eliminiere die Koordinaten, die durch holonome Zwangsbedingungen abhängig sind, und eliminiere die λ_i.

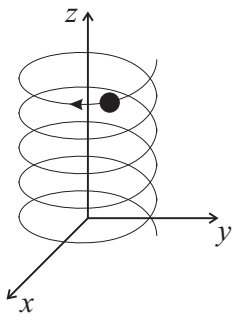
Zur Beschreibung der Bewegung eines Systems aus N Massepunkten erhalten wir also ein Gleichungssystem aus

- $3N - k_1 - k_2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung und
- k_2 Differentialgleichungen erster Ordnung.

Im Vergleich der Anwendung der beiden Arten von Lagrange-Gleichungen lässt sich generell sagen: Werden die Bewegungsgleichungen eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen gesucht, dann ist die Verwendung der Gleichungen 2. Art effektiver, da mit diesem Formalismus die Anzahl der Variablen von vornherein auf die der unabhängigen reduziert wird und somit der Rechenaufwand geringer ist. Gibt es jedoch Zwangsbedingungen, die nicht holonom sind, so sind die Lagrange-Gleichungen 1. Art unumgänglich. Zudem sind sie zweckmäßig, wenn Aussagen über die wirkenden Zwangskräfte (zum Beispiel bei technischen Anwendungen) gesucht werden. Das folgende Beispiel demonstriert einen solchen Fall.

Beispiel: Bewegung einer Perle auf einer Schraubenlinie

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit dem Radius R. Die Schwerkraft wirke in negative z-Richtung. Wir benutzen die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) als verallgemeinerte Koordinaten. Zunächst benötigen wir die Zwangsbedingungen und die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von allen drei verallgemeinerten Koordinaten.



Die Zwangsbedingungen lauten

$$\rho - R = 0 = f_1 \tag{28a}$$

$$z - a\phi = 0 = f_2, \tag{28b}$$

wobei die Konstante a ein Maß für den Anstieg der Schraubenlinie ist und wir davon ausgehen, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems so gewählt ist, dass $z(\phi = 0) = 0$. In differentieller Form haben wir:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \tag{29a}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = -a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1. \tag{29b}$$

Wir erhalten die Lagrange-Funktion

$$L(\rho, \phi, z) = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

und berechnen damit die drei Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\rho: \qquad m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \rho} = \lambda_1 = Z_\rho \tag{30a}$$

$$\phi: \qquad m(\rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi} = -a\lambda_2 = Z_\phi \tag{30b}$$

$$z: \qquad m\ddot{z} + mg = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} = \lambda_2 = Z_z. \tag{30c}$$

Nun können wir die Zwangsbedingungen (28) nutzen, um die Bewegungsgleichungen (30) zu vereinfachen. Wegen $\rho = R =$ konst. folgt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ und mit $z = a\phi$ erhalten wir

$$-mR\,\dot{\phi}^2 = \lambda_1 \tag{31a}$$

$$mR^2\ddot{\phi} = -a\lambda_2 \tag{31b}$$

$$ma\ddot{\phi} + mg = \lambda_2. \tag{31c}$$

Zur Eliminierung der λ_i stellen wir zunächst die Gleichungen (31b) und (31c) nach $\ddot{\phi}$ um und setzen sie gleich:

$$-\frac{a\lambda_2}{mR^2} = \frac{\lambda_2 - mg}{ma}.$$

Damit ist

$$\lambda_2 = \frac{mgR^2}{a^2 + R^2}. \tag{32}$$

Desweiteren benutzen wir den Ausdruck für $\ddot{\phi}$ aus der umgestellten Gl. (31b)

$$\ddot{\phi} = -\frac{a\lambda_2}{mR^2},$$

setzen das Ergebnis für λ_2 aus Gl. (32) ein

$$\ddot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2}$$

und erhalten nach Integration unter der Annahme, dass $\dot{\phi}(0) = 0$,

$$\dot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2} t.$$

Eingesetzt in Gl. (31a) ergibt sich

$$\lambda_1 = -\frac{mRa^2g^2}{(a^2 + R^2)^2} t^2. \tag{33}$$

Die Ergebnisse für λ_1 und λ_2 können nun in die Gleichungen (31) eingesetzt werden, um zu vereinfachten Bewegungsgleichungen zu gelangen. Mit den beiden Beziehungen (32) und (33) haben wir zugleich explizite Ausdrücke für die Zwangskräfte gefunden. Wir sehen, dass die Zwangskraft Z_ρ zeitabhängig ist, während dies für die Kräfte Z_ϕ und Z_z nicht der Fall ist. Beide Beziehungen sind im übrigen nur von den Systemparametern abhängig, aber nicht von den verallgemeinerten Variablen. Wir haben in diesem Beispiel somit die wirkenden Zwangskräfte berechnet, ohne dafür die Bewegungsgleichungen lösen zu müssen.