

Theoretische Physik – Mechanik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Die Newtonschen Axiome	1
1.2 Koordinatensysteme	2
1.3 Verallgemeinerte Koordinaten	3
1.4 Zwangsbedingungen	3
1.5 Ausführliches Beispiel: schiefe Ebene	4
2 Der Lagrange-Formalismus	6
2.1 Das d'Alembertsche Prinzip	6
2.2 Herleitung der Lagrange-Gleichungen	7
2.3 Beispiele	10
2.4 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen	12
2.5 Lagrange-Formalismus mit Reibung	13
2.6 Lagrange-Gleichungen erster Art	17
3 Erhaltungssätze	22
3.1 Kanonische Impulse	22
3.2 Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen	22
3.3 Impulserhaltung	23
3.4 Drehimpulserhaltung	23
3.5 Noether-Theorem	25
3.6 Energieerhaltung	27
4 Freie Schwingungen	29
4.1 Linearisierung von Schwingungen	29
4.2 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden	30
4.3 Beispiel: gekoppelte Oszillatoren	33
4.4 Hauptachsentransformation	35
4.5 Übergang zum schwingenden Kontinuum	37

5	Lineare Schwingungen mit äußerer Kraft	43
5.1	Der freie gedämpfte harmonische Oszillator	43
5.2	Gedämpfter harmonischer Oszillator mit harmonischer externer Kraft	45
5.3	Allgemeine periodische Kraft – Fourierreihen	46
5.4	Nicht-periodische Kraft – Fouriertransformationen	49
5.5	Green-Funktionen	51
5.6	Die Diracsche Delta-Funktion	53
6	Zentralkräfte	54
6.1	Das Zweikörperproblem	54
6.2	Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld	55
6.3	Das Kepler-Problem	58
7	Beschleunigte Bezugssysteme	63
7.1	Der total antisymmetrische Einheitstensor	63
7.2	Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen	65
8	Der Hamilton-Formalismus	68
8.1	Die Legendre-Transformation	68
8.2	Die Hamiltonschen Gleichungen	69
8.3	Hamiltonfunktion und Energie	70
9	Das Hamiltonsche Prinzip	73
9.1	Variationsrechnung	73
9.2	Das Hamiltonsche Prinzip	75
10	Die Poisson-Klammern	77
11	Kanonische Transformationen	79
11.1	Punkttransformation	79
11.2	Kanonische Transformationen	81
11.3	Die Erzeugende	85
12	Kanonische Invarianten	88
12.1	Fundamentale Poisson-Klammern	88
12.2	Phasenvolumen	88

1 Grundlagen

1.1 Die Newtonschen Axiome

Isaac Newton (geb. 4.1.1643, gest. 31.3.1727) gelang es, in seinem Werk "Philosophiae naturalis principia mathematica" (Druck 1687) eine bis heute gültige mathematische Beschreibung der Mechanik zu formulieren. Dieses Werk war entscheidend für die Entwicklung der theoretischen Physik.

Seine Beschreibung der Mechanik basierte auf drei grundlegenden Axiomen:

1. **Das Trägheitsgesetz:** Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
2. **Die dynamische Grundgleichung:** Die zeitliche Änderung des Impulses, definiert durch

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

ist gleich der auf den Körper einwirkenden Kraft. Es gilt also

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Ferner gilt das **Superpositionsprinzip**. Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so addieren sich die Kräfte wie Vektoren:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.$$

3. **Das Wechselwirkungsgesetz:** Die Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich und von entgegengesetzter Richtung:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji},$$

wobei \vec{F}_{ij} die Kraft bezeichnet, die der Körper j auf den Körper i ausübt.

Es leuchtet sofort ein, dass das erste Axiom ein Sonderfall des zweiten ist (setze $\vec{F} = 0$).

In der klassischen Mechanik ist die Masse eines Körpers konstant, also unabhängig von der Geschwindigkeit \vec{v} (in der relativistischen Mechanik ist dies nicht mehr der Fall). Es gilt daher

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Dies ist die *dynamische Grundgleichung der Mechanik*. Es bezeichnen \vec{r} den Ortsvektor und \vec{a} die Beschleunigung des Körpers.

Diese *Bewegungsgleichungen* sind die Bestimmungsgleichungen der Bewegung einer Punktmasse. Kennt man die Form dieser Gleichung, so ist es prinzipiell möglich, die Bahn, also den zeitlichen Verlauf der Bewegung, zu berechnen. Diese Gleichungen stellen ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung dar.

Beispiel: Der freie Fall

In Erdnähe wirkt auf eine Punktmasse mit Masse m die Kraft

$$F = -mg \quad \text{mit } g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

wobei das Koordinatensystem so gelegt wurde, dass die z-Achse senkrecht nach oben zeigt. Es handelt sich um ein *homogenes Schwerfeld*. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nach Gl. (1) zu

$$m\ddot{z} = -mg.$$

Die Masse taucht auf beiden Seiten auf und kann daher gekürzt werden. Es ist interessant, sich die unterschiedliche Bedeutung der Massen zu veranschaulichen. Bei der Masse auf der rechten Seite der Gleichung handelt es sich um die sog. *schwere Masse*, die auf der linken Seite wird als *träge Masse* bezeichnet.

Zweimalige Integration ergibt für die Bewegung der Punktmasse

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Der genaue Verlauf der Bewegung hängt von den *Anfangsbedingungen* z_0 und v_0 , d. h. der Höhe bzw. der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$, ab.

1.2 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten in 2 Dimensionen

Wir wählen die Koordinaten (r, ϕ) . Die Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi, \\ y &= r \sin \phi. \end{aligned}$$

Polarkoordinaten in 3 Dimensionen

Wir wählen die Koordinaten (r, ϕ, θ) . Die Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi, \\ y &= r \cos \theta \sin \phi, \\ z &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten

Wir wählen die Koordinaten (ρ, ϕ, h) . Die Transformationsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi, \\y &= \rho \sin \phi, \\z &= h.\end{aligned}$$

1.3 Verallgemeinerte Koordinaten

Alle Größen, die die Konfiguration einer mechanischen Anordnung beschreiben können, werden **verallgemeinerte Koordinaten** genannt.

Für ein System aus N Massepunkten lautet die allgemeine Form der Transformationsgleichungen:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N}, t), \quad i = 1, \dots, N$$

Unter den **Freiheitsgraden** eines Systems versteht man die Anzahl der *unabhängigen* Variablen.

Das Ziel bei einer Beschreibung eines mechanischen Systems wird oft sein, einen günstigen Satz an unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten zu finden. Für diesen Prozess gibt es kein Standardrezept, jedes Problem erfordert eine besondere Behandlung.

1.4 Zwangsbedingungen

Zwangbedingungen schränken die Bewegung der Teilchen ein, zum Beispiel eine Masse auf einer Fläche, eine Perle auf einem Draht etc. Die Kräfte, die die Einschränkung der Bewegung der Massen erzwingen, nennt man **Zwangskräfte**.

Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Zwangsbedingungen, die in der Form

$$f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$$

dargestellt werden können. Damit schließen wir die wichtigen Fälle aus, bei denen die Bewegung der Teilchen auf einen Teil des Raumes beschränkt wird (z. B. eine Masse im Innern einer Hohlkugel). Jede Zwangsbedingung in dieser Form reduziert den Freiheitsgrad der Bewegung um eins.

Beispiel: Schiefe Ebene mit zeitlich veränderlichem Winkel

Wir verwenden die kartesischen Koordinaten (x, y) . Die Zwangsbedingung lautet:

$$y - x \tan \alpha(t) = 0.$$

Wir haben also nur eine unabhängige verallgemeinerte Variable.

Beispiel: Pendel mit Fadenlänge l

In den kartesischen Koordinaten (x, y) lautet die Zwangsbedingung

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0.$$

In Polarkoordinaten (r, ϕ) lautet sie einfach

$$r - l = 0 \quad \text{oder} \quad r = l.$$

Wir haben also eine unabhängige verallgemeinerte Variable ϕ .

Beispiel: Pendel mit freiem Aufhängepunkt

Wir beschreiben die Lage der oberen Masse m_1 mit kartesischen Koordinaten (x, y) und die zweite mit den verallgemeinerten Koordinaten (r, ϕ) , wobei r den Abstand der beiden Massen bezeichne und ϕ den Winkel zwischen dem Lot der oberen Masse und der Verbindungslinie zwischen den beiden Massen.

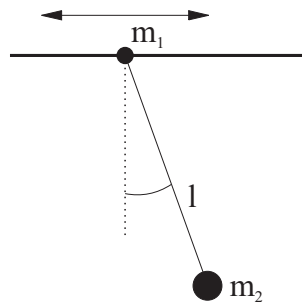


Abbildung 1: Pendel mit freiem Aufhängepunkt.

Die Zwangsbedingungen lauten

$$y = 0, \quad r - l = 0.$$

Damit bleiben die zwei unabhängigen verallgemeinerten Variablen x und ϕ .

1.5 Ausführliches Beispiel: schiefe Ebene

Wir betrachten eine Masse im Schwerfeld der Erde. Die Masse befindet sich auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α . Die Zwangsbedingung lautet damit $y - x \tan \alpha = 0$. Wir wählen y als unabhängige Variable. Damit ist

$$x = \frac{1}{\tan \alpha} \cdot y \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \ddot{y}$$

Es wirkt die externe Kraft (Schwerkraft) $\vec{F} = -mg\hat{e}_y$. Da die Masse entlang der Ebene beschleunigt wird, muss zusätzlich zur externen Kraft auch eine Zwangskraft

$\vec{Z} = (Z_x, Z_y)^T$ wirken (sonst $\vec{F} \parallel \vec{a}$). Die Bewegungsgleichungen lauten unter Einbeziehung der Zwangskraft:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= Z_x, \\ m\ddot{y} &= Z_y - mg. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\tan \alpha} \cdot m\ddot{y} = Z_x, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = Z_y - mg, \quad (3)$$

ein System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Wir eliminieren eine Unbekannte durch die *Annahme*, dass die Zwangskraft senkrecht zur Zwangsebene wirkt.

Dies bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \tan \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_x \\ Z_y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Z_x + Z_y \tan \alpha = 0.$$

Aus (2) folgt

$$m\ddot{y} = -Z_y \tan^2 \alpha. \quad (4)$$

Aus (3) folgt

$$\tan^2 \alpha m\ddot{y} = Z_y \tan^2 \alpha - mg \tan^2 \alpha. \quad (5)$$

Addieren von (4) und (5) führt zu

$$m\ddot{y}(1 + \tan^2 \alpha) = -mg \tan^2 \alpha.$$

Mit $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$ erhalten wir das Endergebnis

$$m\ddot{y} = -mg \sin^2 \alpha.$$

2 Der Lagrange-Formalismus

2.1 Das d'Alembertsche Prinzip

Im Beispiel aus Abschnitt 1.5 hatten wir angenommen, dass die Zwangskraft senkrecht zur Ebene steht, die diese Zwangskraft ausübt, und damit den Körper in eine eingeschränkte Bewegung zwingt. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Zwangskraft keine Arbeit verrichtet. Diese Annahme beruht auf der Erfahrung, dass Zwangkräfte nie in der Lage sind, ein System immer weiter zu beschleunigen. Sie kann nicht aus den Newtonschen Axiomen gefolgert werden.

In Formeln lautet diese Annahme:

$$\vec{Z} \cdot d\vec{r} = 0,$$

wobei mit $d\vec{r}$ eine kleine Verschiebung des Massepunktes bezeichnet wird, welche mit den Zwangsbedingungen vereinbar ist.

Für ein System aus mehreren Massepunkten verschwindet die Summe

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i d\vec{r}_i = 0, \quad (6)$$

das heißt, die Zwangskraft verrichtet *insgesamt* keine Arbeit, die einzelnen Summanden können von Null verschieden sein.

Gl. (6) gilt für zeitunabhängige Zwangsbedingungen. Wie sieht die Lage nun für zeitabhängige Zwangsbedingungen aus?

Wir betrachten als Beispiel eine Perle auf einem Draht, der in einem Punkt befestigt sei und sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der Ebene bewege. Durch die Bewegung kann der Draht durchaus reale Arbeit auf die Perle ausüben. Diese Energie stammt dann aus dem Antriebssystem, welches den Draht bewegt. Für eine reale (in endlicher Zeit stattfindende) Verschiebung der Perle $d\vec{r}$ gilt daher

$$\vec{Z} \cdot d\vec{r} \neq 0,$$

denn \vec{Z} steht senkrecht auf dem Draht, $d\vec{r}$ aber nicht parallel dazu.

Im Folgenden betrachten wir eine Momentaufnahme des Systems. Wir frieren die Zeit in Gedanken ein und definieren die **virtuelle Verrückung**. Dabei handelt es sich um eine Verschiebung der Massepunkte, die einerseits mit den Zwangsbedingungen vereinbar ist, aber andererseits *instantan*, also bei einer zeitlichen Änderung $dt = 0$, erfolgt. Für zeitunabhängige Zwangsbedingungen sind virtuelle Verrückungen und reale Verschiebungen identisch.

Da unter der Bedingung, dass eine Veränderung instantan abläuft, keine Arbeit durch die Zwangskräfte verrichtet werden kann, gilt

$$\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Gestützt auf unsere Erfahrungen *postulieren* wir also: Die Natur der Zwangskräfte ist derart, dass sie keine virtuelle Arbeit verrichten:

$$\sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad (7)$$

Dies ist das **d'Alembertsche Prinzip**. Es handelt sich dabei um ein fundamentales Axiom der theoretischen Mechanik. Es muss zusätzlich zu den Newtonschen Axiomen postuliert werden.

2.2 Herleitung der Lagrange-Gleichungen

Wir gehen vom d'Alembertschen Prinzip in der Form

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (8)$$

aus. Wir untersuchen die Transformation in ein neues Koordinatensystem, in welchem die Variablen q_1, \dots, q_n die Lage aller Massen beschreiben. Die Transformationsgleichungen lauten

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t),$$

wobei die Variablen q_j voneinander abhängen können.

Wir drücken nun die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$, gemessen im kartesischen Koordinatensystem, durch die virtuellen Verrückungen δq_j , gemessen in den verallgemeinerten Koordinaten, aus:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Um Gl. (8) in den neuen Koordinaten auszudrücken, berechnen wir zunächst die virtuelle Arbeit der Kräfte \vec{F}_i

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j,$$

wobei wir die *verallgemeinerten Kräfte*

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

eingeführt haben.

Um den ersten Term von Gl. (8) umformen zu können, sind ein paar kleine mathematische Hilfsmittel von Nutzen. Wir betrachten zunächst die Geschwindigkeit \vec{v} . Gilt die Transformationsgleichung $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_n, t)$, so ist

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}.$$

Hieraus erhalten wir die wichtige Beziehung

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Die Geschwindigkeit abgeleitet nach q_i ergibt

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_i \partial t}.$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right).$$

Daher gilt

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right). \quad (10)$$

Wir formen nun zunächst den ersten Term der Gl. (8) um:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \dots$$

Wir verwenden die Identität

$$\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{f}g = \frac{d}{dt}(fg) - f\dot{g},$$

wobei wir f mit $\dot{\vec{r}}_i$ und g mit $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ identifizieren:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Unter Verwendung der Beziehungen (9) und (10) können wir die Umformung des ersten Terms von Gl. (8) fortsetzen:

$$\dots = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \dots$$

Schließlich benutzen wir die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) = m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

und erhalten

$$\dots = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j,$$

wobei

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad (11)$$

die kinetische Energie des Systems bezeichnet.

Die d'Alembert-Gleichung lautet also in verallgemeinerten Koordinaten

$$\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (12)$$

Betrachten wir nun ein System aus N Teilchen, welches k Zwangsbedingungen unterliegt. Dann existieren $n = 3N - k$ unabhängige Variablen. Wir setzen voraus, dass die Transformationsgleichungen $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ eine Transformation in n unabhängige Variablen q_j beschreiben. Dann sind auch die virtuellen Verrückungen δq_j unabhängig voneinander und es folgt aus (12)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \text{ mit } n = 3N - k. \quad (13)$$

Die in der Mechanik betrachteten Kräfte lassen sich meist aus einem Potential ableiten (konservative Kräfte). Für sie gilt

$$\vec{F}_i(\vec{r}, t) = - \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i}.$$

Wir bezeichnen hier mit \vec{r} die Gesamtheit aller Ortsvektoren \vec{r}_i . Die verallgemeinerten Kräfte lauten demnach

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Der letzte Term (ohne das Vorzeichen) ist genau die partielle Ableitung des Potentials V nach q_j , wobei V als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten dargestellt wird:

$$V(q_1, \dots, q_n, t) = V(\vec{r}(q_1, \dots, q_n, t), t).$$

Also ist

$$Q_j = - \frac{\partial V(q_1, \dots, q_n, t)}{\partial q_j}.$$

Damit lässt sich (13) schreiben als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Wir definieren die **Lagrange-Funktion**

$$L = T - V.$$

Da V nicht von den q_j abhängt, ist

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (14)$$

Dieses Gleichungssystem bezeichnet man als die **Lagrange-Gleichungen** des Systems.

Die Lagrange-Gleichungen eignen sich sehr gut zum Aufstellen von Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten. Hierbei ist folgende „Gebrauchsanweisung“ zu befolgen:

1. Nutze die Zwangsbedingungen (Anzahl k) aus, um die $3N$ Koordinaten durch $3N - k$ unabhängige Koordinaten auszudrücken.
2. Schreibe T und V in Abhängigkeit der $3N - k$ unabhängigen Koordinaten.
3. Bestimme die Lagrange-Funktion als Funktion der unabhängigen Koordinaten, der zugehörigen Geschwindigkeiten und eventuell der Zeit.
4. Stelle die Lagrange-Gleichungen (14) für alle unabhängigen Koordinaten auf.

2.3 Beispiele

N Massepunkte

Betrachten wir zunächst N Massepunkte in kartesischen Koordinaten $\mathbf{q} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ mit einem nur von der Lage der Massepunkte abhängigen Potential $U = U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$. Die Lagrange-Funktion hat die Form

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (15)$$

Es ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = -\text{grad}_i U,$$

wobei grad_i die Gradientenbildung nach den Koordinaten des i -ten Teilchens bezeichnet. Damit folgt für die Lagrange-Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i + \text{grad}_i U = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (16)$$

bzw. komponentenweise geschrieben

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} &= 0 \\ m_i \ddot{y}_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} &= 0 \\ m_i \ddot{z}_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Die Lagrange-Gleichungen entsprechen den Bewegungsgleichungen, die sich aus dem 2. Newtonschen Axiom ergeben. Diese können mit Hilfe des Lagrange-Formalismus aus der Energie des Systems gewonnen werden; eine Betrachtung der Kräfte ist nicht erforderlich.

Ebenes Pendel mit freiem Aufhängepunkt

Es bezeichnen (x_1, y_1, x_2, y_2) die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte m_1 und m_2 . Wir wählen die verallgemeinerten Koordinaten (x, y, r, ϕ) , wobei (x, y) die Lage der Masse m_1 in kartesischen Koordinaten, (r, ϕ) die Lage der Masse m_2 in Polarkoordinaten darstellt. Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen $y = 0$ und $r = l$ bleiben die zwei unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten x und ϕ (vgl. Beispiel auf Seite 4). Die Transformationsgleichungen lauten damit:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= 0 \\ x_2 &= x + l \sin \phi \\ y_2 &= -l \cos \phi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} \\ \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} + l \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{y}_2 &= l \dot{\phi} \sin \phi, \end{aligned}$$

und damit die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi + l^2\dot{\phi}^2).$$

Die potentielle Energie lautet

$$V = m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \phi$$

und damit ist die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \phi + l^2 \dot{\phi}^2) + m_2 g l \cos \phi.$$

Wir erhalten die Bewegungsgleichungen aus den Lagrange-Gleichungen für die Variablen x und ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 &\Rightarrow m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} + m_2 l (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 &\Rightarrow m_2 l \ddot{x} \cos \phi + m_2 l^2 \ddot{\phi} + m_2 g l \sin \phi = 0. \end{aligned}$$

Weiter zusammengefasst:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l (\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) &= 0 \\ \ddot{x} \cos \phi + l \ddot{\phi} + g \sin \phi &= 0. \end{aligned}$$

2.4 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Unter Annahme eines konservativen Kraftfeldes mit Potential V lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Wir gehen in Polarkoordinaten (r, ϕ) über. Forminvarianz der Newtonschen Gleichungen würde bedeuten, dass auch gilt

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad m\ddot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

Dass dies falsch ist, lässt sich leicht nachrechnen. Aus den Transformationsgleichungen $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ folgt

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi.$$

Für die zweiten Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi - r\ddot{\phi} \sin \phi - r\dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi + r\ddot{\phi} \cos \phi - r\dot{\phi}^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial V}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial V}{\partial y} \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = -r \sin \phi \frac{\partial V}{\partial x} + r \cos \phi \frac{\partial V}{\partial y} \quad (19)$$

Aus Gl. (18) folgt

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = m \cos \phi \ddot{x} + m \sin \phi \ddot{y} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2).$$

Aus Gl. (19) folgt

$$-\frac{\partial V}{\partial \phi} = -mr \sin \phi \ddot{x} + mr \cos \phi \ddot{y} = mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}).$$

Die Newtonschen Gleichungen sind also nicht forminvariant!

Die Lagrange-Gleichungen wurden jedoch für beliebige verallgemeinerte Koordinaten hergeleitet. Sie gelten in der Form (14) in jedem Koordinatensystem. Es gilt also sowohl

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, y)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, y)}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0$$

als auch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(r, \phi)}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L(r, \phi)}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L(r, \phi)}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L(r, \phi)}{\partial \phi} = 0.$$

Die Invarianz der Lagrange-Gleichungen bei Variablentransformationen kann auch formell bewiesen werden. Wir verzichten an dieser Stelle auf die mathematischen Ausführungen.

Mithilfe der Darstellung der ersten Ableitungen \dot{x} und \dot{y} lässt sich einfach ein Ausdruck für die kinetische Energie eines Teilchens der Masse m in Polarkoordinaten berechnen:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{m}{2}(r^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \\ &\quad + \dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \end{aligned} \quad (20)$$

einen Ausdruck, den wir häufig brauchen werden.

2.5 Lagrange-Formalismus mit Reibung

Reibungskräfte stellen keine konservativen Kräfte dar, da sie von der Geschwindigkeit abhängig sind und sich nicht mit Hilfe eines Potentials $V(\vec{r})$ darstellen lassen. Sie können deshalb in den Lagrange-Gleichungen noch nicht enthalten sein.

Es lassen sich im Wesentlichen die vier folgenden Arten von Reibung unterscheiden:

1. **Haftreibung** \vec{R}_H : Für die Haftreibungskraft \vec{R}_H gilt

$$R_H \leq R_H^{max} = \mu_0 F_N,$$

wobei R_H^{max} die maximale Haftreibungskraft, μ_0 die dimensionslose Haftreibungszahl und F_N den Betrag der Normalkraft bezeichnet. Wird die maximale Haftreibungskraft überschritten, endet die Haftung und Gleiten setzt ein.

2. **Gleitreibung** \vec{R} : Die Gleitreibung ist der Geschwindigkeit \vec{v} entgegengesetzt gerichtet und es gilt in erster Näherung

$$\vec{R} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{v},$$

wobei μ die dimensionslose Gleitreibungszahl und $v = |\vec{v}|$ ist. Im Allgemeinen gilt $\mu < \mu_0$.

3. **Rollreibung** \vec{R} : Die Rollreibung wirkt auf einen runden Körper, der sich rollend bewegt, ohne zu rutschen:

$$\vec{R} = -\mu_R F_N \frac{\vec{v}}{v}$$

mit der dimensionslosen Rollreibungszahl μ_R , die wesentlich kleiner als die Gleitreibungszahl ist.

4. **Reibung in Fluiden** \vec{R} : Körper, die sich in Fluiden bewegen, erfahren einen Widerstand

$$\vec{R} = -c_w A \frac{\rho}{2} v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

wobei ρ die Dichte des Fluids und A die Querschnittsfläche des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung ist. Der dimensionslose Widerstandsbeiwert c_w ist von der Form des Körpers und dessen Oberflächenbeschaffenheit abhängig. Bei kleinen v gilt näherungsweise $c_w \sim v^{-1}$ und bei großen v gilt $c_w \approx \text{konst.}$

Um Reibungskräfte im Lagrange-Formalismus zu berücksichtigen, führen wir die generalisierten Reibungskräfte

$$R_j = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, 3N - k \quad (21)$$

ein. Da die R_j nicht mit Hilfe eines Potentials darstellbar sind, können sie nicht Teil der Lagrange-Funktion werden. Wir müssen deshalb die Lagrange-Gleichungen erweitern.

In der Herleitung der Lagrange-Gleichung hatten wir Gl. (13)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0$$

gefunden und können an diesem Punkt die Reibungskräfte R_j einbringen. Die generalisierten Kräfte Q_j setzen sich nunmehr aus den konservativen Kräften und den Reibungskräften zusammen. Nach Einführung der Lagrange-Funktion sind erstere in L enthalten und wir erhalten die **erweiterten Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - R_j = 0 \quad j = 1, \dots, 3N - k.$$

Zur schnelleren Berechnung der R_j führen wir eine **Dissipationsfunktion** P ein, so dass

$$R_j = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} \quad j = 1, \dots, 3N - k \quad (22)$$

gilt. Die Dissipationsfunktion spielt somit eine ähnliche Rolle wie das Potential V für die Darstellung der konservativen Kräfte.

Zur Aufstellung der Dissipationsfunktion nutzen wir den Umstand, dass sich die Reibungskräfte in der Regel als

$$\vec{R}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \quad i = 1, \dots, N \quad (23)$$

schreiben lassen.

Wir setzen diesen Ansatz in (21) ein und erhalten

$$R_j = -\sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

und

$$\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{v}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}$$

folgt

$$R_j = -\sum_{i=1}^N h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j}.$$

Allgemein gilt

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \int_0^{v_i} h_i(\hat{v}_i) d\hat{v}_i = h_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j},$$

so dass

$$R_j = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\hat{v}_i) d\hat{v}_i.$$

Durch Vergleich mit Gl. (22) erhalten wir als Definition für die Dissipationsfunktion

$$P := \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(\hat{v}_i) d\hat{v}_i. \quad (24)$$

Die erweiterten Lagrange-Gleichungen lauten damit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad j = 1, \dots, 3N - k. \quad (25)$$

Vorgehensweise für den Lagrange-Formalismus mit Reibung

1. Berechnung von P :

- Berechnung der (meist einfachen) Integrale in kartesischen Koordinaten
- Darstellung der Geschwindigkeiten v_i als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten und deren Ableitungen $v_i = v_i(q_j, \dot{q}_j)$ und Einsetzen in die Dissipationsfunktion

2. Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}$ und Einfügen in die Lagrange-Gleichungen

Beispiel: Schiefe Ebene mit Gleitreibung

Wir definieren verallgemeinerte Koordinaten (x, y) derart, dass die x -Achse horizontal entlang der Ebene verläuft und die y -Achse entlang der Neigung mit festem Winkel α nach oben. Für die Reibungskraft gilt:

$$\vec{R} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{v} = -h(v) \frac{\vec{v}}{v} \quad \Leftrightarrow \quad h(v) = \mu F_N = \mu mg \cos \alpha.$$

Die Dissipationsfunktion (in diesem Fall ist $N = 1$) lautet

$$P = \int_0^v h(\hat{v}) d\hat{v} = \int_0^v \mu mg \cos \alpha d\hat{v} = \mu mg v \cos \alpha.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit in den Koordinaten (x, y) lautet $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ und es folgt

$$P = \mu mg \cos \alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ gilt dann

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ V &= mgy \sin \alpha \\ \Rightarrow L &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \sin \alpha \end{aligned}$$

Anwendung der erweiterten Lagrange-Gleichung (25) für x ergibt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = \mu mg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

und wir erhalten die erste Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + mg\mu \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = 0.$$

Analoge Rechnung für y liefert die zweite Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{y} + \mu mg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + mg \sin \alpha = 0.$$

Das einfach aussehende Problem führt im Ergebnis auf ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen, dessen Lösung nicht ohne weiteres analytisch möglich ist. Nur für den Spezialfall $x = \text{konst.}$ ergibt sich eine einfache Gleichung.

2.6 Lagrange-Gleichungen erster Art

Der bisher eingeführte Formalismus beruht auf den Lagrange-Gleichungen zweiter Art. Er setzt voraus, dass die Zwangsbedingungen holonom sind, das heißt als Funktion $f(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$ darstellbar. Lassen sich die Zwangsbedingungen nur in differentieller Form darstellen oder sollen die Zwangskräfte berechnet werden, so ist die Anwendung der Lagrange-Gleichungen erster Art zweckmäßig.

Zur Herleitung gehen wir in verallgemeinerte Koordinaten q_j über, ohne dabei die Zahl der Koordinaten mithilfe der Zwangsbedingungen zu reduzieren. Aus dem d'Alembertschen Prinzip hatten wir

$$\sum_{j=1}^{3N} \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right]}_{\neq 0} \delta q_j = 0 \quad j = 1, \dots, 3N \quad (26)$$

hergeleitet, wobei L nun eine Funktion aller $3N$ generalisierten Koordinaten ist. Da die Koordinaten q_j voneinander abhängig sein können und somit auch die virtuellen Verrückungen δq_j , können die einzelnen Summanden ungleich Null sein.

Im Weiteren benutzen wir die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Dazu schreiben wir die k Nebenbedingungen (sowohl holonome als auch differentielle) in der Form

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} dq_j + a_{it} dt = 0 \quad i = 1, \dots, k,$$

wobei für holonome Nebenbedingungen $f_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) = 0$

$$a_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad \text{mit } j = 1, \dots, 3N \quad a_{it} := \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

gilt.

Betrachten wir nun eine virtuelle Verrückung δq_j , für die also $\delta t = 0$, so gilt folglich

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Dies liefert uns k Gleichungen, die wir mit zunächst unbekanntem Faktoren λ_i multiplizieren (den Lagrangeschen Multiplikatoren) und aufaddieren:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^{3N} a_{ij} \delta q_j = 0.$$

Dieses Ergebnis fügen wir zu (26) hinzu und erhalten

$$\sum_{j=1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0.$$

Unter den $3N$ Verrückungen δq_j sind k abhängige. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien dies die letzten k Verrückungen $\delta q_{3N-k+1}, \dots, \delta q_{3N}$. Das vorherige Ergebnis können wir entsprechend in zwei Teilsommen zerlegen:

$$\sum_{j=1}^{3N-k} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j + \underbrace{\sum_{j=3N-k+1}^{3N} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j}_{(*)} = 0.$$

Wir wählen nun die λ_i so, dass $(*)$ Null wird. Somit muss auch die erste Summe gleich Null sein und da dort die δq_j voneinander unabhängig sind, müssen auch hier die Summanden einzeln verschwinden. Somit folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (27)$$

Dies sind die **Lagrange-Gleichungen erster Art**.

Die Bedeutung der rechten Seite der Gl. (27) wird erkennbar, wenn wir uns vorstellen, die Bewegungseinschränkung entsprechend der Zwangsbedingungen würde durch zusätzliche äußere Kräfte \hat{Q}_j bewirkt. Dann würde gelten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \hat{Q}_j.$$

Die rechte Seite der Gl. (27) stellt also die generalisierten Zwangskräfte dar:

$$Z_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij},$$

wobei Z_j die Zwangskraft ist, die die Koordinate q_j einschränkt.

Mit den Lagrange-Gleichungen erster Art erhalten wir $3N$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hinzu kommen k Zwangsbedingungen (k_1 holonome und k_2 differentielle). Für die Anwendung der Lagrange-Gleichungen erster Art ergibt sich folgende **Vorgehensweise**:

1. Wähle die verallgemeinerten Koordinaten und stelle die Zwangsbedingungen in differentieller Form auf.
2. Stelle die Lagrange-Funktion $L = T - V$ als Funktion aller $3N$ verallgemeinerten Koordinaten auf.
3. Berechne die $3N$ Lagrange-Gleichungen erster Art.
4. Eliminiere die Koordinaten, die durch holonome Zwangsbedingungen abhängig sind, und eliminiere die λ_i .

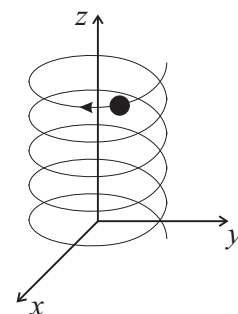
Zur Beschreibung der Bewegung eines Systems aus N Massepunkten erhalten wir also ein Gleichungssystem aus

- $3N - k_1 - k_2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung und
- k_2 Differentialgleichungen erster Ordnung.

Im Vergleich der Anwendung der beiden Arten von Lagrange-Gleichungen lässt sich generell sagen: Werden die Bewegungsgleichungen eines Systems mit holonomen Zwangsbedingungen gesucht, dann ist die Verwendung der Gleichungen 2. Art effektiver, da mit diesem Formalismus die Anzahl der Variablen von vornherein auf die der unabhängigen reduziert wird und somit der Rechenaufwand geringer ist. Gibt es jedoch Zwangsbedingungen, die nicht holonom sind, so sind die Lagrange-Gleichungen 1. Art unumgänglich. Zudem sind sie zweckmäßig, wenn Aussagen über die wirkenden Zwangskräfte (zum Beispiel bei technischen Anwendungen) gesucht werden. Das folgende Beispiel demonstriert einen solchen Fall.

Beispiel: Bewegung einer Perle auf einer Schraubenlinie

Eine Perle der Masse m gleite reibungsfrei auf einer Schraubenlinie mit dem Radius R . Die Schwerkraft wirke in negative z -Richtung. Wir benutzen die Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) als verallgemeinerte Koordinaten. Zunächst benötigen wir die Zwangsbedingungen und die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von allen drei verallgemeinerten Koordinaten.



Die Zwangsbedingungen lauten

$$\rho - R = 0 = f_1 \quad (28a)$$

$$z - a\phi = 0 = f_2, \quad (28b)$$

wobei die Konstante a ein Maß für den Anstieg der Schraubenlinie ist und wir davon ausgehen, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems so gewählt ist, dass $z(\phi = 0) = 0$. In differentieller Form haben wir:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \phi} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \quad (29a)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = -a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1. \quad (29b)$$

Wir erhalten die Lagrange-Funktion

$$L(\rho, \phi, z) = T - V = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

und berechnen damit die drei Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\rho : \quad m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \rho} = \lambda_1 = Z_\rho \quad (30a)$$

$$\phi : \quad m(\rho^2\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi} = -a\lambda_2 = Z_\phi \quad (30b)$$

$$z : \quad m\ddot{z} + mg = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z} = \lambda_2 = Z_z. \quad (30c)$$

Nun können wir die Zwangsbedingungen (28) nutzen, um die Bewegungsgleichungen (30) zu vereinfachen. Wegen $\rho = R = \text{konst.}$ folgt $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ und mit $z = a\phi$ erhalten wir

$$-mR\dot{\phi}^2 = \lambda_1 \quad (31a)$$

$$mR^2\ddot{\phi} = -a\lambda_2 \quad (31b)$$

$$ma\ddot{\phi} + mg = \lambda_2. \quad (31c)$$

Zur Eliminierung der λ_i stellen wir zunächst die Gleichungen (31b) und (31c) nach $\ddot{\phi}$ um und setzen sie gleich:

$$-\frac{a\lambda_2}{mR^2} = \frac{\lambda_2 - mg}{ma}.$$

Damit ist

$$\lambda_2 = \frac{mgR^2}{a^2 + R^2}. \quad (32)$$

Desweiteren benutzen wir den Ausdruck für $\ddot{\phi}$ aus der umgestellten Gl. (31b)

$$\ddot{\phi} = -\frac{a\lambda_2}{mR^2},$$

setzen das Ergebnis für λ_2 aus Gl. (32) ein

$$\ddot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2}$$

und erhalten nach Integration unter der Annahme, dass $\dot{\phi}(0) = 0$,

$$\dot{\phi} = -\frac{ag}{a^2 + R^2}t.$$

Eingesetzt in Gl. (31a) ergibt sich

$$\lambda_1 = -\frac{mRa^2g^2}{(a^2 + R^2)^2}t^2. \quad (33)$$

Die Ergebnisse für λ_1 und λ_2 können nun in die Gleichungen (31) eingesetzt werden, um zu vereinfachten Bewegungsgleichungen zu gelangen. Mit den beiden Beziehungen (32) und (33) haben wir zugleich explizite Ausdrücke für die Zwangskräfte gefunden. Wir sehen, dass die Zwangskraft Z_ρ zeitabhängig ist, während dies für die Kräfte Z_ϕ und Z_z nicht der Fall ist. Beide Beziehungen sind im übrigen nur von den Systemparametern abhängig, aber nicht von den verallgemeinerten Variablen. Wir haben in diesem Beispiel somit die wirkenden Zwangskräfte berechnet, ohne dafür die Bewegungsgleichungen lösen zu müssen.

3 Erhaltungssätze

Das größte Problem bei der Untersuchung mechanischer Systeme ist oft nicht das Aufstellen der Bewegungsgleichungen, sondern deren Integration. Daher ist es von Vorteil, möglichst viele Kenntnisse über das Verhalten der untersuchten Systeme zu erhalten. *Erhaltungsgrößen*, also Variablen, die sich im zeitlichen Verlauf nicht ändern, bieten Informationen über das untersuchte System ohne Lösung der Bewegungsgleichungen.

3.1 Kanonische Impulse

Die sog. *kanonischen Impulse* werden definiert durch

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Für ein System aus N Massepunkten, die sich in einem Potential $V(\vec{r})$ befinden, lautet die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}).$$

Die kanonischen Impulse entsprechen in diesem Fall den gewöhnlichen Impulsen

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m \dot{\vec{r}}_i. \quad (34)$$

Für eine freie Bewegung in 2-dimensionalen Polarkoordinaten lautet mit Gl. (20) die Lagrange-Funktion allgemein

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(\cos, \phi).$$

In diesem Fall ist der kanonische Impuls

$$p_\phi = ml^2 \dot{\phi}$$

gleich dem Drehimpuls.

3.2 Zyklische Koordinaten und Erhaltungsgrößen

Koordinaten q_j , die nicht in der Lagrange-Funktion auftreten (sondern nur ihre Ableitung \dot{q}_j), heißen *zyklisch*. Aus den Lagrange-Gleichungen (14) folgt für zyklische Koordinaten sofort, dass gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0.$$

Die zugehörigen kanonischen Impulse sind also Erhaltungsgrößen.

Allgemein nennt man eine Funktion $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ eine *Erhaltungsgröße* (auch *Konstante der Bewegung* oder *Bewegungsintegral*), wenn für alle Bahnen $\mathbf{q}(t)$, die die Lagrange-Gleichungen erfüllen, gilt

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0.$$

Hier haben wir die Vektoren $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ und $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^T$ eingeführt, die jeweils die Gesamtheit der verallgemeinerten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten bezeichnen.

3.3 Impulserhaltung

Der *Impulserhaltungssatz* folgt aus der Homogenität des Raumes. Die physikalischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems ändern sich bei einer beliebigen räumlichen Parallelverschiebung nicht. Wir betrachten nun eine infinitesimale Verschiebung um den Vektor $\vec{\varepsilon}$ und fordern, dass die Lagrange-Funktion unverändert bleibt. Die Ortsvektoren \vec{r}_i werden zu $\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$ und es soll gelten

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i = \vec{\varepsilon} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0.$$

Da $\vec{\varepsilon}$ beliebig ist, wird $\delta L = 0$ nur erfüllt, wenn

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

ist. Mit den Lagrange-Gleichungen (14) und Gl. (34) folgt daraus

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{P}.$$

Der Gesamtimpuls \vec{P} des Systems bleibt also erhalten.

3.4 Drehimpulserhaltung

Die *Drehimpulserhaltung* folgt aus der Isotropie des Raumes. Darunter versteht man die Tatsache, dass die physikalischen Eigenschaften eines Systems bei einer beliebigen Drehung unverändert bleiben.

Wir betrachten die Drehung um einen infinitesimalen Winkel $\delta\varphi$. Wir führen den Drehvektor $\delta\vec{\varphi}$ ein, der in die Richtung der Drehachse zeige (positiver Drehsinn) und den Betrag $|\delta\vec{\varphi}| = \delta\varphi$ habe.

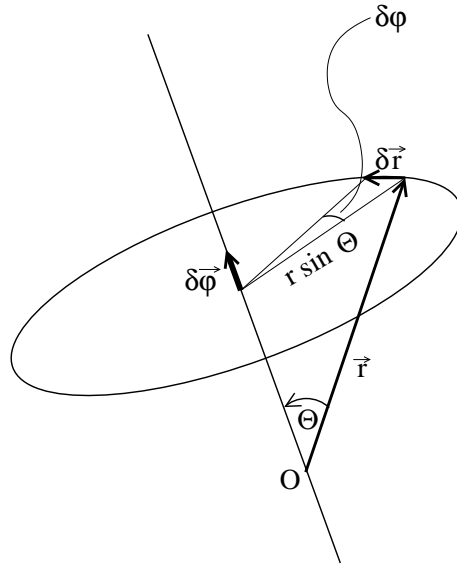


Abbildung 2: Drehung definiert durch den Drehvektor $\delta\vec{\varphi}$.

Wie groß ist nun bei einer durch $\delta\vec{\varphi}$ definierten Drehung die Änderung des Ortsvektors $\delta\vec{r}$? Aus geometrischen Überlegungen (siehe Abb. 2) folgt, dass

$$\begin{aligned}\delta\vec{\varphi} &\perp \delta\vec{r} \\ \delta\vec{r} &\perp \vec{r} \\ |\delta\vec{r}| &= r \sin \Theta \delta\varphi.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (35)$$

Ebenso werden natürlich auch Geschwindigkeitsvektoren gedreht, es gilt also entsprechend

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}. \quad (36)$$

Wir verlangen wieder, dass sich die Lagrange-Funktion bei einer Drehung nicht ändert, dass also gilt

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta \vec{v}_i \right) = 0. \quad (37)$$

Für die Impulse gilt

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}$$

und nach den Lagrange-Gleichungen ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}.$$

Mit Gl. (35) und Gl. (36) lässt sich Gl. (37) schreiben als

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{p}}_i (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) + \vec{p}_i (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_i) \right) = 0.$$

Mit der für beliebige Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} gültigen Relation

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

ist also

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^N \left(\delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i) + \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{v}_i \times \vec{p}_i) \right) \\ &= \delta\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \vec{v}_i \times \vec{p}_i \right). \end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i,$$

so folgt sofort, dass

$$\delta L = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0.$$

Da aber $\delta\vec{\varphi}$ beliebig ist, muss gelten

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \vec{M} = 0,$$

wobei die Größe

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

den Gesamtdrehimpuls des Systems bezeichnet.

3.5 Noether-Theorem

In den beiden vorangegangenen Abschnitten haben wir spezielle Erhaltungsgrößen aus der Invarianz der Lagrange-Funktion bezüglich bestimmter Koordinatentransformationen abgeleitet. Das Noether-Theorem erlaubt eine Verallgemeinerung. Es besagt, dass zu jeder solchen Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße gehört. In der Hamiltonschen Mechanik gilt auch die Umkehrung dieses Satzes, aber nicht in der Lagrange-Mechanik.

Wir untersuchen eine Koordinatentransformation

$$q_j \rightarrow q'_j = q'_j(\mathbf{q}, t, \alpha) \quad j = 1, \dots, n,$$

die invertierbar ist, das heißt

$$q_j = q_j(\mathbf{q}', t, \alpha) \quad j = 1, \dots, n,$$

und die in dem kontinuierlichen Parameter α stetig differenzierbar ist. Für den Fall $\alpha = 0$ ergibt sich die identische Transformation

$$q'_j(\mathbf{q}, t, \alpha = 0) = q_j.$$

Durch Substitution der alten Koordinaten q_j mittels der Transformationsgleichung erhalten wir die Lagrange-Funktion in den neuen Koordinaten

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L\left(\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), \frac{d}{dt}\mathbf{q}(\mathbf{q}', t, \alpha), t\right) =: L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha).$$

Wegen der Invarianz der Lagrange-Funktion bezüglich der Koordinatentransformation gilt gleichzeitig

$$L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t, \alpha) = L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t).$$

Wir leiten nun die Lagrange-Funktion in den neuen Koordinaten partiell nach α ab:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial (\frac{d}{dt}q_j(\mathbf{q}', t, \alpha))}{\partial \alpha} \right].$$

Unter Anwendung der Lagrange-Gleichung und der Produktregel erhalten wir

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right].$$

Da die Lagrange-Funktion invariant ist, muss die linke Seite der Gleichung Null sein. Der Ausdruck in den eckigen Klammern auf der rechten Seite der Gleichung ist somit eine Erhaltungsgröße. Dies gilt für beliebige α . Wir können deshalb nach der Differentiation $\alpha = 0$ setzen, so dass die neuen Koordinaten q'_j wieder in die ursprünglichen Koordinaten q_j übergehen.

Damit haben wir das **Noether-Theorem** hergeleitet:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{j=1}^{3N-k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j(\mathbf{q}', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

ist eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrange-Funktion unter der kontinuierlichen, stetig differenzierbaren Koordinatentransformation $q_j \rightarrow q'_j = q'_j(\mathbf{q}, t, \alpha)$ invariant ist.

In Abschnitt 3.2 hatten wir gezeigt, dass der zu einer zyklischen Koordinate zugehörige kanonische Impuls eine Erhaltungsgröße ist. Dies ist ein Spezialfall des Noether-Theorems.

3.6 Energieerhaltung

Die Homogenität der Zeit hat zur Folge, dass die Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen Systems nicht explizit von der Zeit abhängen kann (die Wahl des Zeitnullpunktes ist beliebig, bei gleichen Anfangsbedingungen muss die gleiche Bewegung ablaufen). Das heißt, es ist

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right).$$

Demzufolge muss gelten

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0. \quad (38)$$

Die Funktion

$$H = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (39)$$

wird *Hamilton-Funktion* genannt. Sie ist in Systemen, in denen die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, eine Erhaltungsgröße.

Im Folgenden betrachten wir ein ruhendes Koordinatensystem. Das heißt, dass die Transformationsgleichungen nicht explizit von der Zeit abhängen:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n).$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

Damit ist

$$\vec{v}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

und die kinetische Energie lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \left[\sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (40)$$

wobei wir die Abkürzung

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

eingeführt haben.

In einem ruhenden Koordinatensystem ist die kinetische Energie also stets eine quadratische Form in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten.

Damit ist die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - V(q_1, \dots, q_n).$$

Also ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k,$$

folglich

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T.$$

Daraus folgt, dass die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems ist:

$$H = 2T - L = 2T - T + V = T + V = E = \text{const.}$$

4 Freie Schwingungen

Sowohl freie als auch von außen angeregte Schwingungen gehören zu den wichtigsten mechanischen Phänomenen überhaupt. Darüberhinaus werden Schwingungen in Form von Oszillationen auch in einer Vielzahl anderer wissenschaftlicher Disziplinen beobachtet.

4.1 Linearisierung von Schwingungen

Aus der Lagrange-Funktion für ein Pendel der Masse m mit konstanter Fadenlänge l im homogenen Schwerfeld der Erde

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi$$

folgt die Bewegungsgleichung für die einzige unabhängige verallgemeinerte Koordinate ϕ :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi.$$

Für kleine Auslenkungswinkel ϕ können wir näherungsweise $\sin \phi \approx \phi$ setzen, womit die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \phi.$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Gleichung ist sehr einfach zu lösen. Eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{x} = -ax$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta),$$

wobei $\omega^2 = a$ ist und die Werte für die Amplitude A und die Phasenverschiebung δ aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen. Für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ gilt (unter Berücksichtigung von $\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \delta)$)

$$x_0 = A \cos \delta \tag{41}$$

$$v_0 = A\omega \sin \delta. \tag{42}$$

Wir erhalten A , indem das Quadrat der mit ω multiplizierten Gl. (41) zum Quadrat der Gl. (42) addiert wird:

$$\omega^2 x_0^2 + v_0^2 = A^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2.$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich durch Division von Gl. (42) durch Gl. (41):

$$\frac{v_0}{x_0} = \omega \tan \delta \quad \Rightarrow \quad \tan \delta = \frac{v_0}{\omega x_0}.$$

Lineare Differentialgleichungen sind im Allgemeinen einfach zu behandeln. Wir verallgemeinern daher das eingangs beschriebene Verfahren der Linearisierung der Sinusfunktion für Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{x} = f(x).$$

Die Taylorentwicklung von $f(x)$ um einen Punkt x_0 lautet

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n.$$

Wir nehmen nun an, dass $f(0) = 0$ ist, und entwickeln um den Punkt $x = 0$ und vernachlässigen alle Terme der Ordnung zwei oder größer. Dann ist in der Nähe des Ursprungs

$$f(x) \approx f'(0) \cdot x$$

und damit gilt für kleine Auslenkungen x die linearisierte Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f'(0) x.$$

4.2 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Wir betrachten im Folgenden ein System mit n Freiheitsgraden. Wir nehmen ein ruhendes Koordinatensystem an, so dass die kinetische Energie als quadratische Form in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten geschrieben werden kann (siehe Gl. (40) in Abschnitt 3.6):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n t_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{T} \dot{\mathbf{q}}.$$

Hier haben wir den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^T$ und die Matrix $\mathcal{T} = (t_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ eingeführt. Aus Gl. (40) folgt außerdem, dass die Matrix \mathcal{T} symmetrisch ist ($t_{jk} = t_{kj}$ bzw. $\mathcal{T}^T = \mathcal{T}$).

Das System befinde sich bei $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T = 0$ in einer Gleichgewichtslage, es wirken dort also keine Kräfte, das heißt, es gilt für das Potential

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=0} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (43)$$

Wir betrachten nun die Taylorentwicklung von $V(\mathbf{q})$ um den Punkt $\mathbf{q} = 0$. Der allgemeine Ausdruck einer Taylorentwicklung einer reellwertigen Funktion $f(\mathbf{x})$, die von n Variablen abhängt ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$) um einen Punkt \mathbf{x}_0 lautet

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n h_j \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^n h_j h_k h_l \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} + \dots$$

Die ersten zwei Terme können kompakt in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathcal{H}^f \mathbf{h} + \dots,$$

wobei $\mathcal{H}^f = (H_{jk}^f)_{1 \leq j,k \leq n}$ die Hesse-Matrix der Funktion f ist, deren Komponenten folgendermaßen definiert sind:

$$H_{jk}^f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Vernachlässigen wir in der Taylorentwicklung von $V(\mathbf{q})$ alle Terme der dritten und höheren Ordnung, so ergibt sich eine Näherung für Werte von \mathbf{q} in der Nähe des Ursprungs:

$$V(\mathbf{q}) = V(0) + \sum_i \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_0 q_i q_j + \dots$$

Das konstante Glied $V(0)$ ist frei wählbar, wir setzen es gleich Null. Der lineare Term verschwindet aufgrund der Gleichgewichtsbedingung (43). Wir können also auch $V(\mathbf{q})$ in dieser Näherung als quadratische Form

$$V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n v_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{v} \mathbf{q}$$

schreiben, wobei die Matrix $\mathbf{v} = (v_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ mit

$$v_{jk} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0$$

eingeführt wurde, die ebenfalls symmetrisch ist. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich also aus der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n t_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n v_{jk} q_j q_k$$

unter der Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n t_{jk} \dot{q}_k \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k.$$

Sie lauten

$$\sum_{k=1}^n t_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k = 0$$

oder kompakt in Matrixschreibweise

$$\mathcal{T} \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{V} \mathbf{q} = 0. \quad (44)$$

Die Matrixgleichung (44) entspricht einem System von n gekoppelten linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir lösen dieses System mit dem Ansatz

$$\mathbf{q}(t) = C \vec{a} \cos(\omega t - \delta). \quad (45)$$

Aus diesem Ansatz folgt für die zweite zeitliche Ableitung

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\omega^2 \mathbf{q}(t).$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (44) liefert mit dem Ansatz 45

$$\begin{aligned} (\mathcal{V} - \omega^2 \mathcal{T}) \mathbf{q} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mathcal{V} - \omega^2 \mathcal{T}) \vec{a} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten von \vec{a} . Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass nur dann von Null verschiedene Lösungen existieren, wenn

$$\det(\mathcal{V} - \omega^2 \mathcal{T}) = 0 \quad (47)$$

ist. Diese Gleichung wird **charakteristische Gleichung** oder auch **Säkulargleichung** genannt. Die linke Seite stellt ein Polynom vom Grad n in ω^2 dar. Wir erhalten also n (im Allgemeinen verschiedene) Werte $\omega_1, \dots, \omega_n$. Diese Werte nennt man die **Eigenfrequenzen** des Systems. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass alle ω_r verschiedene Werte annehmen.

Jede Lösung ω_r führt natürlich auch zu einer anderen Lösung \vec{a}_r des Gleichungssystems (46).

Gemäß dem gewählten Ansatz (45) ergibt sich für ω_r die spezielle Lösung

$$\mathbf{q}_r(t) = C_r \vec{a}_r \cos(\omega_r t - \delta_r).$$

Diese Gleichungen beschreiben die so genannten **Fundamentalschwingungen** oder auch **Eigenschwingungen** des Systems, bei denen alle Freiheitsgrade harmonisch

mit einer einzigen Frequenz ω_r schwingen. Die Komponenten des Vektors \vec{a}_r geben an, in welchem Verhältnis die Amplituden der einzelnen Freiheitsgrade zueinander stehen.

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet also nach dem Superpositionsprinzip

$$\mathbf{q}(t) = \sum_r C_r \vec{a}_r \cos(\omega_r t - \delta_r).$$

Die allgemeine Lösung enthält alle Eigenfrequenzen und ist nicht periodisch in der Zeit.

4.3 Beispiel: gekoppelte Oszillatoren

Wir betrachten zwei identische harmonische Oszillatoren, die durch eine Feder gekoppelt sind (siehe Abb. 3).

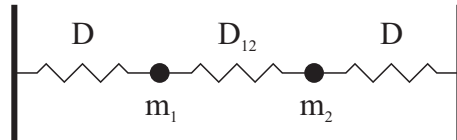


Abbildung 3: Zwei gekoppelte Oszillatoren

Die kinetische Energie beträgt

$$T(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathcal{T} \dot{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{T} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die potentielle Energie lautet

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (Dx_1^2 + Dx_2^2 + D_{12}(x_1 - x_2)^2) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} D + D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenfrequenzen ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung (wir setzen $\lambda = \omega^2$)

$$\det(\mathbf{V} - \lambda \mathcal{T}) = \begin{vmatrix} D + D_{12} - \lambda m & -D_{12} \\ -D_{12} & D + D_{12} - \lambda m \end{vmatrix} = (D + D_{12} - \lambda m)^2 - D_{12}^2 = 0.$$

Die beiden Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{D}{m} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{D + 2D_{12}}{m}$$

ergeben die Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D_{12}}{m}}.$$

Die Amplitudenverhältnisse erhalten wir, indem wir die Lösungen λ in das lineare Gleichungssystem (46) einsetzen. Für $\lambda_1 = D/m$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a_{11} - a_{21} = 0,$$

eine Lösung ist also

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog ergibt sich für $\lambda_2 = (D + 2D_{12})/m$, dass $a_{12} + a_{22} = 0$ ist, eine Lösung ist also

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungen lassen sich leicht interpretieren. Im ersten Fall gilt stets $x_1 = x_2$, die beiden Massen schwingen also genau in Phase. Im zweiten Fall gilt stets $x_1 = -x_2$, die Massen schwingen also genau entgegengesetzt.

Die Fundamentallösungen lauten somit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{und } \mathbf{x}_2 &= \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ihre Superposition ergibt die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x} = C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei die vier Integrationskonstanten C_1, C_2, δ_1 und δ_2 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Schwebung

Wir betrachten das Beispiel mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = A, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$$

Diese führen auf die Lösung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ x_2(t) &= \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass die Kopplung zwischen den Oszillatoren sehr schwach ist, das heißt $D_{12} \ll D$, woraus folgt, dass $\omega_1 \approx \omega_2$. Die beiden Oszillatoren schwingen dann jeweils mit der mittleren Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ mit einer sich sehr langsam ändernden Amplitude $A \cos((\omega_2 - \omega_1)t/2)$ bzw. $A \sin((\omega_2 - \omega_1)t/2)$. Dieses An- und Abschwellen der Schwingung nennt man *Schwebung*. Hierbei wandert die Energie des Systems mit der Schwebungsfrequenz $\omega_2 - \omega_1$ zwischen den beiden Oszillatoren hin und her.

4.4 Hauptachsentransformation

Wir kehren zurück zum Differentialgleichungssystem (44). Dieses System wäre äußerst einfach zu lösen, wenn \mathcal{T} und \mathcal{V} diagonal wären. Dann entkoppeln die Gleichungen und wir haben

$$t_{ii}\ddot{q}_i = -v_{ii}q_i$$

mit den Lösungen

$$q_i = C_i \cos(\omega_i t - \delta_i) \quad \text{mit} \quad \omega_i^2 = \frac{v_{ii}}{t_{ii}}.$$

Im Folgenden suchen wir eine Transformation, die beide Matrizen gleichzeitig diagonalisiert. Solch eine Transformation heißt *Hauptachsentransformation*.

Die spezielle Lösung der Bewegungsgleichung zur Eigenfrequenz ω_r war $\mathbf{q}_r = C_r \vec{a}_r \cos(\omega_r t - \delta_r)$, wobei der Vektor $\vec{a}_r = (a_{1r}, \dots, a_{sr})^T$ die Gleichung

$$(\mathcal{V} - \omega_r^2 \mathcal{T}) \cdot \vec{a}_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V} \vec{a}_r = \omega_r^2 \mathcal{T} \vec{a}_r \quad (48)$$

erfüllt. Ebenso gilt natürlich für eine andere Eigenfrequenz $\omega_{r'}$, dass

$$(\mathcal{V} - \omega_{r'}^2 \mathcal{T}) \cdot \vec{a}_{r'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V} \vec{a}_{r'} = \omega_{r'}^2 \mathcal{T} \vec{a}_{r'}. \quad (49)$$

Wir multiplizieren Gl. (48) von links mit $\vec{a}_{r'}^T$ und Gl. (49) von links mit \vec{a}_r^T , subtrahieren die so erhaltenen Gleichungen voneinander und bekommen

$$\vec{a}_{r'}^T \mathcal{V} \vec{a}_r - \vec{a}_r^T \mathcal{V} \vec{a}_{r'} = \omega_r^2 \vec{a}_{r'}^T \mathcal{T} \vec{a}_r - \omega_{r'}^2 \vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_{r'}. \quad (50)$$

Beachten wir, dass $\vec{a}_{r'}^T \mathcal{V} \vec{a}_r = (\vec{a}_r^T \mathcal{V} \vec{a}_{r'})^T$ (denn $\vec{a}_{r'}^T \mathcal{V} \vec{a}_r$ ist ein Skalar), und ferner, dass $(\vec{a}_{r'}^T \mathcal{V} \vec{a}_r)^T = \vec{a}_r^T \mathcal{V}^T \vec{a}_{r'}$, so folgt wegen der Symmetrie von \mathcal{V} , dass

$$\vec{a}_{r'}^T \mathcal{V} \vec{a}_r = \vec{a}_r^T \mathcal{V} \vec{a}_{r'}.$$

Analog gilt

$$\vec{a}_{r'}^T \mathcal{T} \vec{a}_r = \vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_{r'}.$$

Damit folgt aus Gl. (50)

$$(\omega_r^2 - \omega_{r'}^2) \vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_{r'} = 0.$$

Da wir angenommen hatten, dass $\omega_r \neq \omega_{r'}$, muss also

$$\vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_{r'} = 0 \quad (51)$$

gelten. Da die kinetische Energiematrix \mathcal{T} positiv definit ist, ist

$$\vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_r > 0.$$

Die Vektoren \vec{a}_r sind nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt, wir können sie daher so normieren, dass

$$\vec{a}_r^T \mathcal{T} \vec{a}_r = 1. \quad (52)$$

Für jede der s Lösungen ω_r der charakteristischen Gleichung erhalten wir einen Lösungsvektor \vec{a}_r . Wir definieren nun die Matrix \mathcal{A} , die diese s Vektoren als Spalten enthält, also $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s)$. Für diese Matrix gilt wegen Gl. (51) und Gl. (52)

$$\mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A} = \mathbb{1}.$$

Definieren wir ferner die Diagonalmatrix \mathcal{D} mit den ω_r^2 als Diagonalelementen

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_s^2 \end{pmatrix},$$

so können wir Gl. (46) schreiben als

$$\mathcal{V} \mathcal{A} = \mathcal{T} \mathcal{A} \mathcal{D}.$$

Multiplikation von links mit \mathcal{A}^T ergibt

$$\mathcal{A}^T \mathcal{V} \mathcal{A} = \mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A} \mathcal{D} = \mathcal{D}.$$

Damit haben wir die gesuchte Hauptachsentransformation gefunden. Die Matrix \mathcal{A} diagonalisiert gleichzeitig die kinetische Energiematrix \mathcal{T} und die potentielle Energiematrix \mathcal{V} .

Die Transformationsgleichungen

$$\mathbf{q} = \mathcal{A} \mathbf{Q}$$

definieren neue Koordinaten $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_s)^T$. Die Koordinaten \mathbf{Q} heißen *Hauptkoordinaten*, da in diesem Koordinatensystem die Differentialgleichungen (44) entkoppelt sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathcal{V} \mathbf{q} \\ \Leftrightarrow \mathcal{T} \mathcal{A} \ddot{\mathbf{Q}} &= -\mathcal{V} \mathcal{A} \mathbf{Q} & | \text{ Multiplikation von links mit } \mathcal{A}^T \\ \Leftrightarrow \ddot{\mathbf{Q}} &= -\mathcal{D} \cdot \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir gezeigt, dass es stets möglich ist, verallgemeinerte Koordinaten zu finden, in denen die Fundamentalschwingungen eine besonders einfache Gestalt haben. Führt das System eine Fundamentalschwingung aus, so ändert sich genau eine Koordinate periodisch mit der Zeit, während alle anderen konstant gleich Null sind.

4.5 Übergang zum schwingenden Kontinuum

Ein Beispiel für ein *schwingendes Kontinuum* ist eine schwingende Gitarrensaite. Um zu einem solchen Kontinuum zu gelangen, stellen wir uns eine Anzahl von n in Reihe gekoppelter Federschwinger vor, die die Gesamtlänge l einnehmen (Abb. 4). Wir wollen die Anzahl der Schwinger erhöhen, wobei die Gesamtlänge und die Massendichte konstant gehalten werden sollen. Für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ erhalten wir das schwingende Kontinuum.

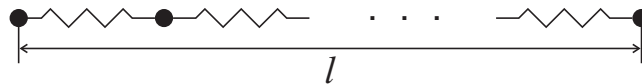


Abbildung 4: Gekoppelte Oszillatoren entlang einer Gesamtlänge l

Grundsätzlich sind zwei Schwingungsarten in einer solchen Anordnung zu unterscheiden: transversale und longitudinale Schwingungen. Zunächst wollen wir nachweisen, dass die Bewegungsgleichungen in beiden Fällen analog formuliert werden können. Dazu betrachten wir einen 3er-Schwinger, dessen Enden festgehalten werden (Abb. 5). Die Massen m der Massepunkte und die Federkonstanten D seien gleichgroß.

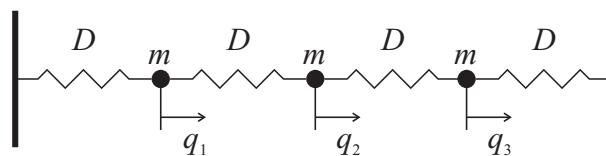


Abbildung 5: Drei gekoppelte Oszillatoren, die longitudinal schwingen

Für die longitudinalen Schwingungen lassen sich leicht die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

und die potentielle Energie

$$V = \frac{D}{2}(q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2 + q_3^2)$$

aufschreiben. Für eine kompakte Summenschreibweise führen wir zwei Hilfsgrößen q_0 und q_4 ein, für die für alle Zeiten $q_0 = q_4 = 0$ gelten soll. Die Lagrange-Funktion des Systems lautet damit

$$L = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j^2 - \frac{D}{2} \sum_{j=0}^3 (q_{j+1} - q_j)^2.$$

Mithilfe des Lagrange-Formalismus können wir daraus die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{q}_k = D [(q_{k+1} - q_k) - (q_k - q_{k-1})] \quad (53)$$

für ein bestimmtes q_k ableiten.

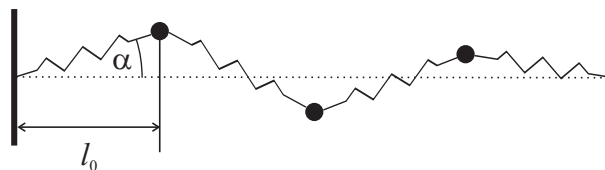


Abbildung 6: Drei gekoppelte Oszillatoren, die transversal schwingen

Für transversale Schwingungen, also vertikale Auslenkungen der Massepunkte, benötigen wir zunächst ein paar Vorüberlegungen (siehe Abb. 6). Es bezeichne α den Auslenkungswinkel und l_0 den Gleichgewichtsabstand der Massepunkte. Wir nehmen an, dass sich die von links und rechts auf einen Massepunkt einwirkenden Kräfte in x -Richtung näherungsweise ausgleichen, so dass wir die Kraftwirkung in diese Richtung vernachlässigen können. Wir können daher davon ausgehen, dass sich die Massen in x -Richtung nicht bewegen, und es bleibt als vertikale Kraft $F \sin \alpha$, wobei F den Betrag der Rückstellkraft der Feder bezeichnet.

Es gilt für kleine Auslenkungswinkel α die Beziehung

$$F \sin \alpha \approx F \tan \alpha = F \frac{q_{j+1} - q_j}{l_0},$$

wobei die q_j nunmehr die transversale Auslenkung der Massepunkte bezeichnen. Für die potentielle Energie gilt damit

$$V \approx \frac{F}{2l_0} \sum_{j=0}^3 (q_{j+1} - q_j)^2,$$

während der Ausdruck der kinetischen Energie gegenüber dem Fall der longitudinalen Schwingungen unverändert bleibt. Mithilfe der Lagrange-Funktion und des Lagrange-Formalismus erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{q}_k = \frac{F}{l_0} [(q_{k+1} - q_k) - (q_k - q_{k-1})]. \quad (54)$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen (53) und (54) zeigt die Analogie der mathematischen Beschreibung der beiden Schwingungsformen.

Wir wollen nun die Lösung der Bewegungsgleichung mithilfe der Säkulargleichung (47) ermitteln. Dazu benötigen wir die beiden Energiematrizen, die allgemein für beliebige n das folgende Aussehen haben:

$$\mathcal{T} = m \cdot \mathbb{1}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 2D & -D & 0 & \dots & 0 \\ -D & 2D & -D & & \vdots \\ 0 & -D & 2D & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -D \\ 0 & \dots & & -D & 2D \end{pmatrix}.$$

Für $n = 3$ lösen wir die Säkulargleichung

$$\det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) = \begin{vmatrix} 2D - \lambda m & -D & 0 \\ -D & 2D - \lambda m & -D \\ 0 & -D & 2D - \lambda m \end{vmatrix} = (2D - \lambda m)^3 - 2D^2(2D - \lambda m) = 0$$

und erhalten die Eigenwerte

$$\lambda_{1/3} = \frac{D}{m}(2 \pm \sqrt{2}), \quad \lambda_2 = \frac{2D}{m}.$$

Wir erhalten drei Fundamentalschwingungen mit den Eigenfrequenzen und Eigenvektoren

$$\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{D}{m}} \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2 \frac{D}{m}} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{D}{m}} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung 7 zeigt das Aussehen der Fundamentalschwingungen im Falle transversaler Schwingungen. Im ersten Fall schwingen alle drei Massepunkte in die gleiche Richtung, wobei die beiden äußeren eine etwas kleinere Amplitude aufweisen als der mittlere. Im zweiten Fall verharrt der mittlere Massepunkt in Ruhe, während die

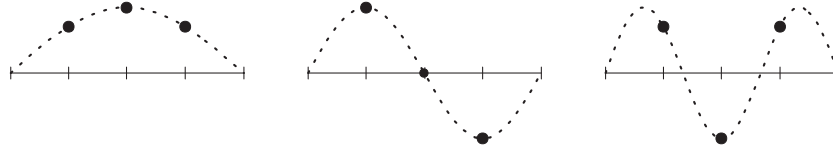


Abbildung 7: Fundamentalschwingungen dreier gekoppelter Oszillatoren

äußeren beiden mit gleicher Amplitude, aber in entgegengesetzte Richtung schwingen. Im dritten Fall schließlich schwingt der mittlere Massepunkt mit etwas größerer Amplitude entgegengesetzt zu den beiden äußeren Massen. Es lässt sich zeigen, dass die Amplituden auf einer Kurve $\sin(rx)$ mit $r = 1, 2, 3$ und $0 \leq x \leq \pi$ liegen. Für eine beliebige Anzahl n an Massepunkten gilt allgemein:

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{D}{m}} \sin \frac{\pi r}{2(n+1)} \quad r = 1, \dots, n$$

$$a_{jr} = \sin \left(\frac{\pi r}{n+1} j \right) \quad j, r = 1, \dots, n.$$

Übergang zum Kontinuum

Wir lassen nun die Anzahl der Massepunkte gegen unendlich gehen. Dabei sollen drei Bedingungen gelten:

- Die Gesamtlänge l der Anordnung sei konstant. Das bedeutet:

$$n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad l_0 \rightarrow 0, \quad \text{so dass} \quad (n+1)l_0 = l = \text{konst.}$$

- Die Gesamtmasse ($n \cdot m$) und somit die Dichte pro Länge sei konstant. Das bedeutet:

$$m \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad l_0 \rightarrow 0, \quad \text{so dass} \quad \frac{m}{l_0} = \rho = \text{konst.}$$

- Das Produkt aus Federkonstante und Federlänge sei konstant. Das bedeutet:

$$D \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad l_0 \rightarrow 0, \quad \text{so dass} \quad Dl_0 = \text{konst.}$$

Wir teilen die Bewegungsgleichung (53) durch Dl_0^2 und erhalten

$$\frac{m}{Dl_0^2} \ddot{q}_k = \frac{1}{l_0} \left[\frac{q_{k+1} - q_k}{l_0} - \frac{q_k - q_{k-1}}{l_0} \right], \quad (55)$$

wobei der Vorfaktor auf der linken Seite einen konstanten Wert darstellt.

Um zum Kontinuum überzugehen, ersetzen wir den diskreten Index k durch die kontinuierliche Raumkoordinate x , wobei gilt $x = k \cdot l_0$. Anstelle der Auslenkung $q_k(t)$ steht die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$. Wir bilden nun in der Bewegungsgleichung (55) den Grenzwert für $l_0 \rightarrow 0$. Dabei gehen wir auf der rechten Seite in zwei

Schritten vor:

$$\begin{aligned} & \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{1}{l_0} \left[\frac{\Psi(x + l_0, t) - \Psi(x, t)}{l_0} - \frac{\Psi(x, t) - \Psi(x - l_0, t)}{l_0} \right] \\ &= \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{1}{l_0} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x + \frac{l_0}{2}} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x - \frac{l_0}{2}} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Auf der linken Seite von Gl. (55) geht die zeitliche Ableitung von $q_k(t)$ in die partielle Ableitung von $\Psi(x, t)$ nach der Zeit über und wir definieren die Konstante

$$\frac{m}{Dl_0^2} = \frac{\rho}{Dl_0^2} =: \frac{1}{c^2}.$$

Somit erhalten wir die *eindimensionale Wellengleichung*

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (56)$$

Spezielle Lösung: Stehende Wellen

Eine spezielle Lösung der Wellengleichung (56) ist die sogenannte *Bernoullische Lösung*. Dabei gehen wir davon aus, dass sich die Wellenfunktion als Produkt eines rein ortsabhängigen Anteils $g(x)$ und eines rein zeitabhängigen Anteils $h(t)$ ergibt

$$\Psi(x, t) = g(x) \cdot h(t),$$

so dass für die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} g \ddot{h} = g'' h$$

gilt. Wir separieren die Terme nach den unabhängigen Variablen und erhalten

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{h}}{h} = \frac{g''}{g}.$$

Da die Funktionen auf der linken Seite nur von t , die auf der rechten Seite nur von x abhängig sind, müssen die beiden Seiten konstant sein. Wir setzen diese Konstante gleich $-k^2$ und erhalten zwei einzelne Bestimmungsgleichungen für Orts- und Zeitanteil

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= -k^2 c^2 h \\ g'' &= -k^2 g \end{aligned}$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1 \cos(kct) + h_2 \sin(kct) \\ g(x) &= g_1 \cos(kx) + g_2 \sin(kx). \end{aligned}$$

Die darin enthaltenen Konstanten lassen sich durch die Randbedingungen einschränken. So gilt für die schwingende Saite, dass die Enden festgehalten werden, das heißt $g(0) = g(l) = 0$. Daraus folgt, dass $g_1 = 0$ und für die Wellenzahl

$$k = r \frac{\pi}{l} \quad r = 1, 2, \dots$$

gilt. Die zugehörigen Eigenfrequenzen sind

$$\omega_r = kc = r \frac{\pi c}{l} \quad r = 1, 2, \dots$$

und die partiellen Lösungen lauten

$$\Psi_r(x, t) = \sin \frac{r\pi x}{l} [d_r \cos(\omega_r t) + e_r \sin(\omega_r t)]$$

mit den Konstanten d_r und e_r , die aus den Anfangsbedingungen $\Psi(x, 0)$ und $\dot{\Psi}(x, 0)$ zu bestimmen sind. Die allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition

$$\Psi(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \Psi_r(x, t).$$

Abbildung 8 zeigt die ersten drei partiellen Lösungen. Die mit B markierten Stellen maximaler Auslenkung werden als *Wellenbauch*, die mit K markierten Stellen, an denen keine Auslenkung erfolgt, als *Wellenknoten* bezeichnet.

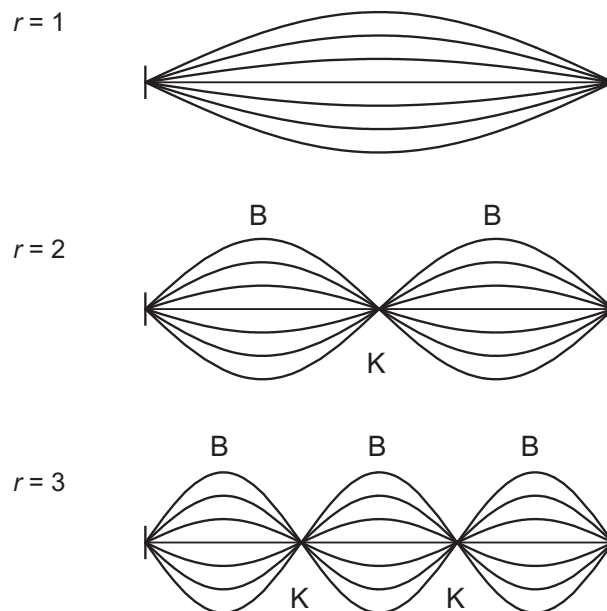


Abbildung 8: Die ersten drei Grundschwingungen

5 Lineare Schwingungen mit äußerer Kraft

5.1 Der freie gedämpfte harmonische Oszillator

Wir untersuchen zunächst den harmonischen Oszillator mit Reibung ohne Einwirkung einer äußeren Kraft. Wir nehmen an, dass eine Reibungskraft – die sog. *Stokes'sche Reibung* – wirkt, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Dies führt auf eine Bewegungsgleichung der Gestalt

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = 0,$$

wobei m die Masse des Körpers bezeichnet, β den Reibungskoeffizienten und D die Federkonstante. Wir führen die Abkürzungen $2\gamma = \beta/m$ und $\omega_0^2 = D/m$ ein und schreiben diese Gleichung in der Form

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (57)$$

Hierbei handelt es sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Solche Gleichungen behandelt man am besten im Komplexen. Haben wir eine komplexe Lösung $x(t)$ der Gleichung gefunden, so muss auch der Realteil eine Lösung darstellen. Dies kann aus dem Superpositionsprinzip gefolgert werden. Die Linearität der Differentialgleichung ist eine Voraussetzung dafür, dass eine solche Behandlungsweise zulässig ist.

Wir wählen den Ansatz

$$x(t) = c \cdot e^{\lambda t},$$

wobei λ eine komplexe Zahl ist. Der Ansatz impliziert

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x} = \lambda^2 x(t).$$

Einsetzen in Gl. (57) liefert

$$(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) \cdot x(t) = 0.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn der Ausdruck in der Klammer verschwindet, also für die beiden Werte von λ

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2},$$

die den Lösungen $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ und $x(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$ entsprechen.

Wir unterscheiden drei Fälle.

Gedämpfte Schwingungen, $\omega_0^2 > \gamma^2$

In diesem Fall sind die beiden Lösungen λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert komplex:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Gl. (57) lautet in diesem Fall

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}].$$

Für reelle Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ergibt sich eine reelle Lösung der Gestalt

$$x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega t + \phi_0),$$

wobei die Amplitude A und die Anfangsphase ϕ_0 aus den Anfangsbedingungen x_0 und \dot{x}_0 bestimmt werden können.

Kriechbewegung, $\gamma^2 > \omega_0^2$

In diesem Fall sind die Lösungen λ_1 und λ_2 reell,

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t} [c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}]$$

stellt eine asymptotische Näherung an die Nulllinie dar.

Aperiodischer Grenzfall, $\gamma^2 = \omega_0^2$

In diesem Fall liegt eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -\gamma$ vor. Neben der Lösung $x(t) = c_1 e^{-\gamma t}$ existiert hier noch eine weitere Lösung $x(t) = c_2 t e^{-\gamma t}$. Dies ist aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannt. Wir machen die Probe und berechnen dazu die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} t e^{-\gamma t} &= e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t} \\ \frac{d^2}{dt^2} t e^{-\gamma t} &= -2\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 t e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in Gl. (57) bestätigt, dass es sich um eine Lösung handelt. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = e^{-\gamma t} [c_1 + c_2 t].$$

Auch hier geht die Bewegung asymptotisch gegen Null, aber schneller als im Kriechfall. Deshalb arbeiten Zeigermessinstrumente im aperiodischen Grenzfall.

5.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator mit harmonischer externer Kraft

Wir betrachten einen Oszillator, der durch eine äußere Kraft der Form $F_0 \cos \Omega t$ angetrieben wird. Dies führt auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = F_0 \cos \Omega t.$$

Mit den Abkürzungen $2\gamma = \beta/m$, $\omega_0^2 = D/m$ und $f_0 = F_0/m$ schreibt sich diese als

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t. \quad (58)$$

Dies ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist bekannt, dass sich die allgemeine Lösung einer inhomogenen Gleichung aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammensetzt.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung untersucht und festgestellt, dass in jedem Fall für eine solche Lösung $x_h(t)$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0.$$

Das bedeutet, dass dieser Beitrag zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung einen *Einschwingvorgang* beschreibt, der für große Zeiten verschwindet. Wir sind daher besonders an der speziellen Lösung interessiert. Wir rechnen wieder komplex und schreiben Gl. (58) als

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t} \quad (59)$$

und betrachten, nachdem wir eine Lösung gefunden haben, deren Realteil. Wir wählen den Ansatz

$$x(t) = A e^{i(\Omega t - \phi)}.$$

Daraus folgt

$$\dot{x}(t) = i\Omega x(t) \quad \text{und} \quad \ddot{x} = -\Omega^2 x(t).$$

Eingesetzt in Gl. (59) ergibt dies

$$\begin{aligned} A \cdot (-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) e^{i(\Omega t - \phi)} &= f_0 e^{i\Omega t} \\ \Rightarrow A \cdot (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega) &= f_0 e^{i\phi}. \end{aligned}$$

Dies ist eine komplexe Gleichung, die genau dann erfüllt ist, wenn Beträge und Winkel auf beiden Seiten gleich sind. Es folgt aus der Gleichheit der Beträge, dass

$$A \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = f_0,$$

und aus der Gleichheit der Winkel, dass

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Die Kurve

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

bezeichnet man als *Resonanzkurve*. Um ihr Maximum zu berechnen, suchen wir das Minimum von $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$. Hierfür gilt die notwendige Bedingung

$$\frac{d}{d\Omega^2}((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2) = -2(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\gamma^2 = 0.$$

Daraus folgt

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2.$$

Es ergeben sich Lösungen für Ω , wenn $\gamma/\omega_0 < 1/\sqrt{2}$. In diesem Fall wird die Amplitude bei einer äußeren Anregung mit der *Resonanzfrequenz*

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

maximal. Diese maximale Amplitude beträgt

$$A_{\max} = A(\Omega_R) = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

5.3 Allgemeine periodische Kraft – Fourierreihen

Wir betrachten nun eine äußere Kraft $f(t)$, die periodisch mit der Zeit T sein soll. Es soll also gelten $f(t) = f(t + T)$. Es sei $\omega = 2\pi/T$.

Eine periodische Funktion kann man immer aus harmonischen Einzelschwingungen zusammensetzen, deren Frequenzen Vielfache von ω sind:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (60)$$

Die Darstellung einer periodischen Funktion in der Form (60) nennt man **Fourierentwicklung** oder **Fourierreihe** der Funktion $f(t)$. Nach dem *Satz von Dirichlet* ist eine solche Darstellung für eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T immer dann möglich, wenn f stückweise stetig ist und nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Koeffizienten c_n aus der vorgegebenen Funktion $f(t)$ zu berechnen. Dafür nutzen wir aus, dass der Raum, der aus allen periodischen Funktionen der Periode T besteht, ein Vektorraum ist. Ein metrischer Vektorraum V zeichnet sich dadurch aus, dass für zwei beliebige Elemente $x, y \in V$ ein

Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ existiert, für das gilt

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle &\geq 0, \\ \langle x, x \rangle &= 0 \quad \text{genau dann, wenn } x = 0.\end{aligned}$$

Für den Vektorraum, der aus den periodischen Funktionen der Periode T besteht, definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^T f_1(t) f_2^*(t) dt.$$

Hierbei bezeichnet $f_2^*(t)$ die konjugiert komplexe Funktion zu $f_2(t)$. Die Funktionen

$$e_n(t) = e^{in\omega t}$$

stellen eine *Basis* des Funktionenraumes dar. Für sie gilt

$$\begin{aligned}\langle e_k, e_l \rangle &= \int_0^T e_k e_l^* dt = \int_0^T e^{i(k-l)\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ T & \text{für } k = l \end{cases} \\ &= T \cdot \delta_{kl}.\end{aligned}\tag{61}$$

Hier haben wir das sog. *Kronecker-Symbol* δ_{kl} eingeführt, welches gleich eins ist, wenn $k = l$, und ansonsten Null. Die Funktionen e_k stehen also orthogonal aufeinander, sie stellen demnach sogar eine *orthogonale Basis* des Funktionenraumes dar. Wir sehen somit, dass die Fourierreihe einer Funktion

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(t)$$

nichts anderes ist als die Darstellung des Elementes f des Funktionenraumes in der Basis (e_k) . Wir benutzen die Orthogonalitätsrelation (61), um die Koeffizienten auszurechnen. Es ist

$$\langle f, e_k \rangle = \int_0^T f e_k^* dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T c_n e_n e_k^* dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n \delta_{nk} = T c_k,$$

woraus direkt folgt, dass

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt.\tag{62}$$

Fourierreihen im Reellen

Sei $f(t)$ nun eine reellwertige periodische Funktion mit der Periode T . Dann kann man die Fourierreihe auch mit Hilfe der Funktionen $\sin(n\omega t)$ und $\cos(n\omega t)$ schreiben:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t).\tag{63}$$

Beachten wir, dass $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)$, so stellen wir fest, dass die einzigen Summanden in der Darstellung (60), in denen die Frequenz $k\omega t$ auftaucht, diejenigen sind, für die entweder $n = k$ oder $n = -k$:

$$\begin{aligned} n = k & : c_k \cos(k\omega t) + ic_k \sin(k\omega t) \\ n = -k & : c_{-k} \cos(k\omega t) - ic_{-k} \sin(k\omega t). \end{aligned}$$

Addition und Koeffizientenvergleich mit Gl. (63) ergibt die Beziehungen

$$a_0 = 2c_0, \quad c_k + c_{-k} = a_k, \quad i(c_k - c_{-k}) = b_k,$$

oder aufgelöst nach den c_k :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourierreihe können natürlich auch direkt aus der Funktion $f(t)$ errechnet werden. Die zu Gl. (62) analogen Formeln lauten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt. \end{aligned}$$

Beispiel: Kippschwingung

Es sei die periodische Funktion $x(t)$ gegeben, die zwischen $t = 0$ und $t = T$ linear von Null auf x_0 anwachse:

$$x(t) = \frac{x_0}{T} \cdot t \quad \text{für} \quad 0 \leq t < T \quad \text{und} \quad x(t+T) = x(t).$$

Die Koeffizienten c_k berechnen sich gemäß Gl. (62). Mit

$$\int t e^{ct} = \frac{t}{c} e^{ct} - \frac{1}{c^2} e^{ct}$$

ergibt sich

$$c_k = \frac{x_0}{T^2} \left[\left(\frac{t}{-ik\omega} - \frac{1}{-k^2\omega^2} \right) \cdot e^{-ik\omega t} \right]_0^T = i \frac{x_0}{2\pi k}.$$

Für die reellen Koeffizienten gilt also

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = x_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 0, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = -\frac{x_0}{\pi k}. \end{aligned}$$

Die Fourierdarstellung der Kippschwingung lautet demnach

$$x(t) = \frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega t)}{n}.$$

Anwendung auf erzwungene Schwingungen

In der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

ersetzen wir sowohl die anregende Kraft $f(t)$ als auch die Lösungsfunktion $x(t)$ durch ihre Fourierreihen. Aus

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\omega t}$$

folgt für die zeitlichen Ableitungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\omega x_n e^{in\omega t}, \\ \ddot{x}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2\omega^2 x_n e^{in\omega t}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [-n^2\omega^2 x_n + 2i\gamma n\omega x_n + \omega_0^2 x_n] e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation muss für jedes k gelten

$$[-k^2\omega^2 + 2i\gamma k\omega + \omega_0^2] x_k = c_k,$$

bzw.

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{c_0}{\omega_0^2}, \\ x_k &= \frac{c_k}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 + 2i\gamma k\omega} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Diese *algebraischen* Gleichungen bestimmen die Fourierkoeffizienten der Lösung. Aus diesen kann $x(t)$ berechnet werden.

5.4 Nicht-periodische Kraft – Fouriertransformationen

Auch für den Fall, dass die externe Kraft $f(t)$ nicht periodisch ist, lassen sich noch einige analytische Untersuchungen durchführen. Wir betrachten wiederum $f(t)$ als eine Zusammensetzung aus harmonischen Grundschrwingungen. Da $f(t)$ jetzt jedoch nicht mehr periodisch ist, umfasst diese Zusammensetzung nicht nur harmonische Schwingungen mit Frequenzen, die ein Vielfaches einer Grundschrwingung darstellen, sondern *alle* Frequenzen. Daher kann die Darstellung nicht mehr in Form

einer Summe erfolgen, wie in Gl. (60). Wir müssen die Funktion stattdessen als *Fourierintegral* schreiben:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Die Funktion $\tilde{f}(\omega)$ wird **Fouriertransformierte** zu $f(t)$ genannt. Die Klasse der quadratintegrierbaren Funktionen, für die $\int |f(x)|^2 dx < \infty$ ist, stellt wieder einen metrischen Vektorraum dar. Wir definieren das Skalarprodukt

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt.$$

Die Funktionen

$$e_\omega = e^{i\omega t}$$

stellen eine Orthonormalbasis des Vektorraumes dar. Die Orthogonalitätsrelation lautet hier

$$\langle e_\omega, e_{\omega'} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = \delta(\omega - \omega'), \quad (64)$$

wobei $\delta(x)$ die *Diracsche Delta-Funktion* ist. Sie ist überall Null außer bei $x = 0$. Dort ist sie ∞ , und zwar derart, dass für beliebige Werte a, b mit $a \leq 0 \leq b$ gilt

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1.$$

Eine äußerst wichtige Eigenschaft der Delta-Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a).$$

Diese Eigenschaft entspricht der Eigenschaft des Kroneckersymbols. Dort bleibt bei der Summation über einen Index nur ein Summand übrig. Ganz analog bleibt hier bei einer *Integration* über eine Variable nur ein einziger Funktionswert übrig.

Analog zur Herleitung von Gl. (62) betrachten wir zur Berechnung von $\tilde{f}(\omega)$ die Projektion von $f(t)$ auf das Basiselement e_ω :

$$\begin{aligned} 2\pi \langle f, e_\omega \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega') e^{i(\omega' - \omega)t} d\omega' dt \\ &= \sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega). \end{aligned}$$

Also

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Die Transformationsgleichungen von f zu \tilde{f} und umgekehrt sind also – bis auf das Vorzeichen im Exponenten – völlig identisch. Die Informationen, die in den beiden Funktionen enthalten sind, sind exakt äquivalent!

Anwendung auf erzwungene Bewegungen

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t).$$

Wir setzen sowohl für die Kraft $f(t)$ als auch für die Lösung $x(t)$ die Fourierintegrale

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ein. Mit den zeitlichen Ableitungen von $x(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation (64) muss gelten

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega),$$

die gesuchte Lösung der Bewegungsgleichung lässt sich also mittels

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

berechnen.

Die Durchführung der Fouriertransformation reduziert somit das Problem, eine inhomogene Differentialgleichung zu lösen, auf das mathematisch viel einfachere Problem der Berechnung eines Integrals.

5.5 Green-Funktionen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir eine allgemeine, nicht-periodische Kraft als Überlagerung von vielen harmonischen Einzelfunktionen dargestellt. Wegen des Superpositionsprinzips setzt sich die Lösung des Systems, welches mit der allgemeinen Kraft angeregt wird, aus den Lösungen zusammen, die sich ergeben, wenn man eine harmonische äußere Kraft annimmt.

Wir können uns auch eine andere Zerlegung der Kraft vorstellen. Im Folgenden setzen wir eine allgemeine Kraft aus vielen sehr kurzen Kraftstößen zusammen. Kennen wir das Verhalten eines Systems auf einen äußeren Kraftstoß, so können

wir – wiederum wegen des Superpositionsprinzips – das Verhalten des Systems auf eine beliebige externe Kraft berechnen.

Wir betrachten als Beispiel, wie ein sich in der Ruhelage befindlicher, ungedämpfter harmonischer Oszillator reagiert, der einen kurzen Kraftstoß erfährt. Der Stoß finde zum Zeitpunkt t' statt, habe die Dauer Δt und die Stärke F_0 . Die externe Kraft kann also durch die Funktion

$$F_{\Delta t}(t, t') = F_0 \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_- \\ 1 & \text{für } t_- \leq t \leq t_+ \\ 0 & \text{für } t > t_+ \end{cases}, \quad \text{mit } t_{\pm} = t' \pm \frac{1}{2}\Delta t \quad (65)$$

dargestellt werden.

Wir bezeichnen die Lösung der Bewegungsgleichung mit $G_{\Delta t}(t, t')$. Sie erfüllt

$$\frac{d^2}{dt^2}G_{\Delta t}(t, t') + \omega_0^2 G_{\Delta t}(t, t') = \frac{1}{m}F_{\Delta t}(t, t').$$

Wie üblich ist $\omega_0^2 = D/m$. Zur Bestimmung der Lösung betrachten wir drei Bereiche:

(I) $t < t_-$, (II) $t_- \leq t \leq t_+$ und (III) $t > t_+$.

Im Bereich (I) ist die Lösung offensichtlich

$$G_{\Delta t}(t, t') = 0.$$

Im Bereich (II) führt der Oszillator Schwingungen um eine neue Ruhelage aus. Diese ist dadurch charakterisiert, dass $\ddot{G} = 0$ gilt. Sie befindet sich bei F_0/D . Die Lösung in diesem Bereich kann also in der Form

$$G_{\Delta t}(t, t') = \frac{F_0}{D} + a \cos[\omega_0(t - t_-)] + b \sin[\omega_0(t - t_-)]$$

dargestellt werden. Sie muss die Anfangsbedingungen

$$G_{\Delta t}(t, t')|_{t=t_-} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{G}_{\Delta t}(t, t')|_{t=t_-} = 0$$

erfüllen. Dies ist der Fall für $a = -F_0/D$ und $b = 0$. Es folgt

$$G_{\Delta t}(t, t') = \frac{F_0}{D} [1 - \cos[\omega_0(t - t_-)]].$$

Am Ende des Kraftstoßes, also zum Zeitpunkt $t = t_+$, ist

$$G_{\Delta t}(t, t')|_{t=t_+} = \frac{F_0}{D} [1 - \cos(\omega_0 \cdot \Delta t)], \quad (66)$$

$$\dot{G}_{\Delta t}(t, t')|_{t=t_+} = \frac{F_0}{D} \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot \Delta t). \quad (67)$$

Im Bereich (III) liegt keine Kraft mehr vor und der Oszillator führt freie Schwingungen um den Nullpunkt mit den Anfangsbedingungen (66) und (67) aus. Wie einfach durch eine Probe verifiziert werden kann, lautet die Lösung

$$G_{\Delta t}(t, t') = \frac{F_0}{D} [\cos [\omega_0(t - t_+)] - \cos [\omega_0(t - t_-)]] = \dots = 2 \sin \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \sin [\omega_0(t - t')].$$

Wir sehen, dass in allen drei Bereichen die Lösung nicht von t und t' getrennt, sondern nur von der Differenz $t - t'$ abhängt. Wir fassen die Lösung zusammen:

$$G_{\Delta t}(t - t') = \frac{F_0}{D} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_- \\ 1 - \cos [\omega_0(t - t_-)] & \text{für } t_- \leq t \leq t_+ \\ 2 \sin \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \sin [\omega_0(t - t')] & \text{für } t > t_+ \end{cases}$$

Wir definieren die *Green-Funktion*, indem wir den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen. Hierbei nutzen wir im Bereich (III) aus, dass für $\Delta t \approx 0$ gilt, dass $2 \sin \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \approx \omega_0 \Delta t$:

$$F_0 \cdot \Delta t \cdot G(t - t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} G_{\Delta t}(t - t') = \frac{F_0}{D} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t < t' \\ \omega_0 \Delta t \cdot \sin [\omega_0(t - t')] & \text{für } t > t'. \end{cases}$$

Die Green-Funktion kann kompakt dargestellt werden als

$$G(t - t') = \frac{1}{m\omega_0} \sin [\omega_0(t - t')] \Theta(t - t'),$$

wobei die *Sprungfunktion* Θ eingeführt wurde. Sie ist definiert als

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Interpretation: Die Green-Funktion stellt eine Lösung der Bewegungsgleichung dar, die erst ab $t > t'$ von Null verschieden wird. Ab da gleicht sie einer Lösung für die homogene Gleichung mit den Anfangsbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow t'} G(t - t') = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow t'} \dot{G}(t - t') = \frac{1}{m}.$$

5.6 Die Diracsche Delta-Funktion

Im vorigen Abschnitt haben wir Kraftstöße der Dauer Δt betrachtet. Würden wir für den in Gl. (65) definierten Kraftstoß $F_{\Delta t}(t, t')$ den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ durchführen und dabei $F_0 \Delta t$ konstant halten, so wäre das Ergebnis

$$F = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq t' \\ \infty & \text{für } t = t'. \end{cases}$$

Dies ist natürlich nicht erlaubt, denn mit dem Symbol ∞ können wir nicht rechnen. Der Grenzübergang ist aber sehr wohl definiert, nachdem eine Integration durchgeführt wurde und die Funktion $F_{\Delta t}(t, t')$ nicht mehr explizit auftaucht.

6 Zentralkräfte

Zentralkraftbewegungen sind in der Mechanik von herausragender Bedeutung. Einerseits, weil die Planetenbewegungen dazuzählen, deren Untersuchung entscheidende Impulse für die Entwicklung der Physik gegeben hat, andererseits, weil sie zu den wenigen Problemen gehören, die analytisch exakt lösbar sind.

Unter einer Zentralkraft versteht man eine Kraft, die immer in Richtung eines Kraftzentrums zeigt, die also beschrieben werden kann mittels

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \frac{\vec{r}}{r},$$

wobei wir das Kraftzentrum in den Ursprung gelegt haben.

6.1 Das Zweikörperproblem

Das äußerst wichtige sogenannte *Zweikörperproblem*, welches ein System beschreibt, das aus zwei miteinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen besteht, kann in allgemeiner Form vollständig gelöst werden. Wir werden hier untersuchen, wie das Problem wesentlich vereinfacht und auf ein Zentralkraftproblem reduziert werden kann.

Die potentielle Energie der Wechselwirkung der beiden Teilchen hängt nur von ihrem gegenseitigen Abstand ab

$$V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|),$$

wobei \vec{r}_1 und \vec{r}_2 die Ortsvektoren der Teilchen sind. Mit den Massen m_1 und m_2 der Teilchen lautet daher die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Wir definieren den Abstandsvektor der beiden Punkte

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

und legen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt, so dass

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (68)$$

Demnach gilt für die kinetische Energie

$$\frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2.$$

Mit der Definition der *reduzierten Masse*

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (69)$$

schreiben wir die Lagrange-Funktion als

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 - V(r).$$

Damit haben wir das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem in einem radialsymmetrischen Potential reduziert. Bewegungen dieser Art werden in den folgenden Abschnitten diskutiert. Hat man das entsprechende Einkörperproblem gelöst, so erhält man die Koordinaten der ursprünglichen Massen durch die Beziehungen (68).

6.2 Bewegung im konservativen Zentralkraftfeld

Wir wollen den Lagrange-Formalismus verwenden, um Zentralkraftprobleme zu untersuchen. Uns interessieren also nur solche Kräfte, die durch ein Potential dargestellt werden können. Es lässt sich leicht zeigen, dass dies genau diejenigen Zentralkräfte sind, deren Größe nur von der Entfernung zum Kraftzentrum, jedoch nicht von der Richtung abhängt. Solche Kräfte sind also kugelsymmetrisch

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r, t) \frac{\vec{r}}{r}.$$

Es ist einleuchtend, dass das zugehörige Potential $V(r)$ ebenfalls nur von r abhängen kann. Die Bewegung eines Massepunktes in einem radialsymmetrischen Potential erfolgt in einer Ebene, so dass wir die Betrachtung auf ein zweidimensionales Problem reduzieren können.

In zweidimensionalen Polarkoordinaten lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2),$$

die Lagrange-Funktion ist also gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r).$$

Die Koordinate ϕ taucht nicht in der Lagrange-Funktion auf, sie ist also zyklisch. Der zugehörige kanonische Impuls, der Drehimpuls

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (70)$$

ist demnach eine Erhaltungsgröße.

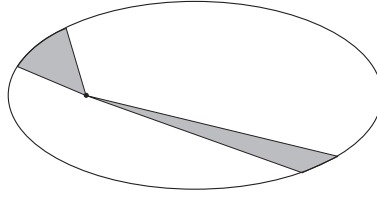


Abbildung 9: Zweites Keplersches Gesetz.

Anschaulich bedeutet dies, dass der Fahrstrahl vom Ursprung zur Masse m pro Zeiteinheit die gleiche Fläche überstreicht (siehe Abb. 9), denn

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{p_\phi}{2m} = \text{const.} \quad (71)$$

Dies ist genau die Aussage des **zweiten Keplerschen Gesetzes**. Interessanterweise gilt diese Aussage für *jedes* Zentralpotential, nicht nur für sogenannte *Keplerpotentiale* der Form

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

Im Prinzip können wir zur weiteren Untersuchung der Bewegung einer Masse in einem Zentralpotential nun die Lagrange-Gleichungen aufstellen und diese lösen. Es bietet sich hier jedoch ein eleganterer Ansatz an. Neben dem Drehimpuls gibt es in dem System eine weitere Erhaltungsgröße, nämlich die Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (72)$$

Wir können diese beiden Erhaltungsgrößen ausnutzen, um die Bahn der Masse zu berechnen. Wir stellen Gl. (70) um:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, \quad (73)$$

eliminieren damit $\dot{\phi}$ in Gl. (72) und erhalten

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r).$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus drei Termen zusammen: der radialen kinetischen Energie, der Rotationsenergie und der potentiellen Energie. Auflösen nach \dot{r} ergibt

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right)}. \quad (74)$$

Da p_ϕ konstant ist, können wir die Rotationsenergie und die potentielle Energie in einen Term zusammenfassen, der wiederum nur von r abhängt. Wir definieren das **effektive Potential**

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{p_\phi^2}{2mr^2}. \quad (75)$$

Damit ergibt sich

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}. \quad (76)$$

Es ist uns damit gelungen, die zeitliche Entwicklung der Radialkomponente r unabhängig vom Winkel ϕ zu betrachten. Die Radialbewegung wird also nicht vom Winkel beeinflusst.

Ein Vergleich mit der allgemeinen Lösung eines konservativen eindimensionalen Systems zeigt, dass man r so behandeln kann wie eine eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potential V_{eff} , welches sich aus dem gewöhnlichen Potential und dem sog. *Zentrifugalpotential* $p_\phi^2/2mr^2$ zusammensetzt. Die Gesamtenergie E_0 ist in einem konservativen, eindimensionalen System mit einer Masse m konstant. Die kinetische Energie lässt sich als $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ schreiben, das Potential sei $V(x)$. Dann ist

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(x))}. \quad (77)$$

Durch die graphische Darstellung von V_{eff} als Funktion von r können wir die radiale Bewegung bereits qualitativ diskutieren, ohne die Gleichungen weiter zu lösen. Sie liefert uns zum Beispiel Kenntnisse über die *Umkehrpunkte*, die den minimalen bzw. maximalen Abstand vom Kraftzentrum bestimmen. Die Umkehrpunkte geben daher an, auf welchen Raumbereich die Bewegung eingeschränkt ist. (In Abb. 10 auf Seite 60 ist eine solche Darstellung für das Beispiel des Keplerpotentials zu sehen.) Trennung der Variablen in Gl. (74) ergibt

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right)}} \quad (78)$$

und Integration

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right)}}, \quad (79)$$

wobei für Bahnbereiche, in denen r wächst (fällt) das positive (negative) Vorzeichen zu verwenden ist. Diese Gleichung definiert die Funktion $t = t(r)$, aus der sich die Bahnkurve $r = r(t)$ durch Umkehrung ergibt.

Um genauere Kenntnis über die Bahn zu erhalten, müssen wir auch ϕ berechnen. Aus Gl. (73) ergibt sich

$$d\phi = \frac{p_\phi}{mr^2} dt, \quad (80)$$

also

$$\phi(t) = \frac{p_\phi}{m} \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} + \phi_0, \quad (81)$$

wobei wir den Anfangswert $\phi(t = 0) = \phi_0$ gesetzt haben. Oft möchte man anstelle des zeitlichen Verlaufs $r = r(t)$ und $\phi = \phi(t)$ die geometrische Bahn $r = r(\phi)$ kennen. Um sie zu bestimmen, setzen wir Gl. (78) in Gl. (80) ein und integrieren:

$$\phi(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{\frac{p_\phi}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{p_\phi^2}{r^2}}}. \quad (82)$$

Die Umkehrung dieser Beziehung liefert die Bahngleichung $r = r(\phi)$.

6.3 Das Kepler-Problem

Aus Gln. (78) und (80) folgt

$$d\phi = \frac{\frac{p_\phi}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_{\text{eff}}(r)]}}.$$

Die Substitution

$$y = \frac{p_\phi}{mr} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{p_\phi}{my}$$

und die Konvention, dass die Integrationsvariablen dy und dr immer positiv sind, dass also

$$dy = \left| \frac{p_\phi}{mr^2} \right| dr$$

ist, führt zu

$$d\phi = \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right) \right]}}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right) \right]}} \\ \Rightarrow \left(\frac{dy}{d\phi} \right)^2 &= \frac{2}{m} \left[E - V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right) \right]. \end{aligned}$$

Wir leiten diese Beziehung nach ϕ ab und erhalten

$$\begin{aligned} 2 \frac{dy}{d\phi} \frac{d^2 y}{d\phi^2} &= \frac{2}{m} \left[0 - \frac{d}{dy} V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right) \cdot \frac{dy}{d\phi} \right]. \\ \Rightarrow m \frac{d^2 y}{d\phi^2} &= -\frac{d}{dy} V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right). \end{aligned} \quad (83)$$

Für das Kepler-Potential $V(r) = -\alpha/r$ ist

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(r) &= -\frac{\alpha}{r} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \\ \Rightarrow V_{\text{eff}}\left(\frac{p_\phi}{my}\right) &= -\frac{m\alpha}{p_\phi} y + \frac{m}{2} y^2. \end{aligned} \quad (84)$$

Dies in Gl. (83) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{d\phi^2} &= \frac{m\alpha}{p_\phi} - my \\ \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\phi^2} &= \frac{\alpha}{p_\phi} - y && \text{(Substituiere } z = y - \frac{\alpha}{p_\phi} \text{)} \\ \Rightarrow \frac{d^2 z}{d\phi^2} &= -z. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist offensichtlich

$$z(\phi) = A \cos(\phi + \delta).$$

Wir wählen die Azimutalachse (die Achse, auf der der Azimut ϕ verschwindet) so, dass $\delta = 0$ ist. Dann ist

$$y = \frac{p_\phi}{mr} = \frac{\alpha}{p_\phi} (1 + \varepsilon \cos \phi)$$

und es folgt

$$r(\phi) = \frac{p_\phi^2 / m\alpha}{1 + \varepsilon \cos \phi}. \quad (85)$$

Dies ist die Fokaldarstellung eines Kegelschnitts, wobei

$$p = p_\phi^2 / m\alpha \quad (86)$$

der *Parameter* und ε die *Exzentrizität* genannt werden.

Wir unterscheiden vier Fälle, die zu unterschiedlichen Bahntypen führen, die wir im Folgenden diskutieren:

Exzentrizität	Bahntyp
$\varepsilon = 0$	Kreis
$0 < \varepsilon < 1$	Ellipse
$\varepsilon = 1$	Parabel
$\varepsilon > 1$	Hyperbel

Für die Unterscheidung der Bahntypen ist die dem Massepunkt innewohnende Energie im Verhältnis zum effektiven Potential verantwortlich, siehe Abb. 10.

Für $\varepsilon = 0$ reduziert sich Gl. (85) zu

$$r(\phi) = p,$$

es wird also eine Kreisbahn beschrieben. Damit dieser Fall vorliegt, muss die Gesamtenergie genau dem Minimum des effektiven Potentials entsprechen. In diesem Fall muss also gelten

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{\alpha}{r} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} \right) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{mr^3} = 0,$$

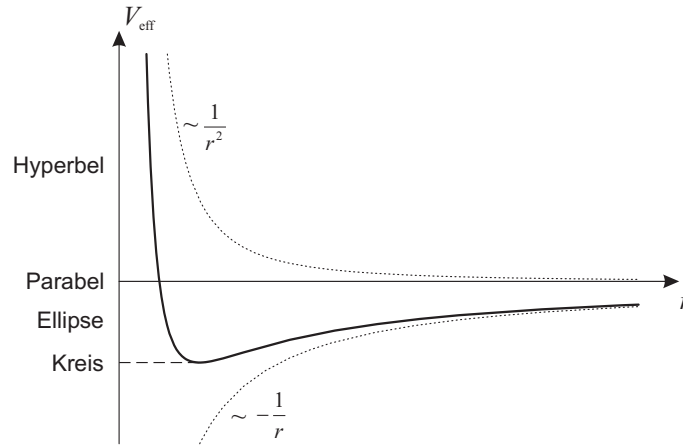


Abbildung 10: Effektives Potential und Bahntypen für das Keplerpotential.

woraus folgt

$$r = \frac{p_\phi^2}{m\alpha}.$$

Dies eingesetzt in den Ausdruck (84) für das effektive Kepler-Potential, ergibt für die Gesamtenergie

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\phi^2}.$$

Für $\varepsilon > 0$ wird der minimale Abstand der Bahnkurve bei $\phi = 0$ eingenommen. Diesen Punkt nennt man das *Perihel*. Der Perihelabstand r_P errechnet sich zu

$$r_P = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{p_\phi^2/m\alpha}{1 + \varepsilon}.$$

Hieraus können wir einen Zusammenhang zwischen Exzentrizität ε und Gesamtenergie E aufstellen. In den Umkehrpunkten gilt $\dot{r} = 0$ und nach Gl. (76) muss dort $V_{\text{eff}} = E$ sein, also

$$\begin{aligned} E = V_{\text{eff}}(r_P) &= -\frac{m\alpha^2}{p_\phi^2}(1 + \varepsilon) + \frac{m\alpha^2}{2p_\phi^2}(1 + \varepsilon)^2 = \frac{m\alpha^2}{2p_\phi^2}(\varepsilon^2 - 1) \\ \Rightarrow \varepsilon^2 &= 1 + \frac{2Ep_\phi^2}{m\alpha^2}. \end{aligned} \quad (87)$$

Für $E < 0$ folgt $\varepsilon < 1$. In diesem Fall beschreibt Gl. (85) eine *Ellipsenbahn*. Dies ist auch die Aussage des **ersten Keplerschen Gesetzes**, welches besagt, dass sich Planeten auf ellipsenförmigen Bahnen um die Sonne bewegen, die sich in einem Brennpunkt der Ellipse befindet. Der maximale Abstand vom Zentrum, das *Aphel*, wird bei $\phi = \pi$ eingenommen. Der Aphelabstand r_A beträgt

$$r_A = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{p_\phi^2/m\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Es folgt für die *große Halbachse* a

$$2a = r_P + r_A = p \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon} \right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}. \quad (88)$$

Mit Gl. (86) und Gl. (87) ergibt sich

$$a = -\frac{p_\phi^2}{m\alpha} \cdot \frac{m\alpha^2}{2Ep_\phi^2} = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (89)$$

Die große Halbachse hängt also nur von der Gesamtenergie ab, nicht jedoch vom Bahndrehimpuls. Das bedeutet, dass alle Bewegungen auf Bahnen mit derselben großen Halbachse die gleiche Gesamtenergie besitzen, sie unterscheiden sich nur im Drehimpuls.

Wir wollen nun auch noch die *kleine Halbachse* b berechnen. Hierzu benutzen wir kartesische Koordinaten x und y mit $x^2 + y^2 = r^2$ und $\cos \phi = x/r$. Aus Gl. (85) folgt

$$r + r\varepsilon \cos \phi = p \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x = p \Rightarrow y^2 = (p - \varepsilon x)^2 - x^2.$$

Die kleine Halbachse befindet sich genau dort, wo y (also auch y^2) maximal ist. Eine notwendige Bedingung hierfür lautet

$$\frac{d(y^2)}{dx} = -2\varepsilon(p - \varepsilon x) - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Daraus folgt für den Maximalwert von y^2

$$(y^2)_{\max} = \left(p - \frac{\varepsilon^2 p}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} = p^2 \left[\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \right] = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

und somit

$$b = \sqrt{(y^2)_{\max}} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (90)$$

Dieser Ausdruck hängt sowohl von der Gesamtenergie als auch vom Drehimpuls ab.

Wir berechnen nun die *Umlaufzeit* T . Wir wissen, dass die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche pro Zeit konstant ist. Nach Gl. (71) ist

$$dF = \frac{p_\phi}{2m} dt.$$

Integrieren wir diese Beziehung über einen gesamten Umlauf, so erhalten wir

$$F = \frac{p_\phi}{2m} T,$$

wobei $F = \pi ab$ die Fläche der von der Bahnkurve eingeschlossenen Ellipse ist. Es folgt mit Gl. (88) und (90)

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi mab}{p_\phi} = \frac{2\pi m}{p_\phi} \cdot \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi m\sqrt{p}}{p_\phi} \left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^{3/2} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{3/2}. \end{aligned}$$

Dies ist der Inhalt des **dritten Keplerschen Gesetzes**, welches besagt, dass das Quadrat der Umlaufzeiten der Himmelskörper proportional zur dritten Potenz der großen Halbachsen ihrer Bahnen ist.

Mit Gl. (89) ergibt sich der Ausdruck

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.$$

Auch die Umlaufzeit T eines Körpers im Kepler-Potential hängt nur von der Gesamtenergie, nicht aber vom Drehimpuls ab.

Betrachten wir nun den Fall $\varepsilon = 1$. Nach Gl. (87) verschwindet für diesen Fall die Gesamtenergie: $E = 0$. Die Bahnkurve, die durch Gl. (85) beschrieben wird, ist hier eine Parabel. Der Minimalabstand beträgt

$$r_{\min} = r(\phi = 0) = \frac{p}{2}.$$

Für den Maximalabstand gilt

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} r(\phi) = \infty,$$

die Radialbewegung ist also nicht beschränkt. Allerdings gilt nach Gl. (76)

$$0 = E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r),$$

und da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(r) = 0,$$

folgt für die Geschwindigkeit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \dot{r} = 0.$$

Die Bewegung geht zwar bis ins Unendliche, die Geschwindigkeit nimmt jedoch immer weiter ab, das heißt, die Bewegung wird unendlich langsam.

Für $\varepsilon > 1$ gilt $E > 0$ und es liegt eine Hyperbelbahn vor. Der Minimalabstand beträgt

$$r_{\min} = r(\phi = 0) = \frac{p}{1+\varepsilon}$$

und die Radialbewegung ist ebenfalls nach oben unbeschränkt. Im Gegensatz zum vorigen Fall gilt für die Grenzggeschwindigkeit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m}{2}\dot{r}^2 = E,$$

die Bewegung wird demnach nicht beliebig langsam.

7 Beschleunigte Bezugssysteme

Für Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen (sog. Galileitransformation), ist das 2. Newtonsche Axiom invariant und somit auch die Bewegungsgleichungen. Wir wollen nun beschleunigte Koordinatensysteme betrachten. Zunächst führen wir jedoch mit dem Epsilontensor ein nützliches Hilfsmittel zur kompakten Schreibweise von Vektoroperationen ein.

7.1 Der total antisymmetrische Einheitstensor

Der ε -Tensor ist ein Tensor dritter Stufe, d. h. ein Gebilde mit drei Indizes:

$$\varepsilon_{ijk} \quad \text{mit } i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Er ist definiert durch

1. $\varepsilon_{123} = 1$ und
2. der Tensor ändert sein Vorzeichen, wenn zwei beliebige Indizes vertauscht werden (z. B. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$). Diese Eigenschaft nennt man antisymmetrisch, daher nennt man ε auch den total antisymmetrischen Einheitstensor.

Aus diesen Definitionen folgt sofort, dass

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

und

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1.$$

Für alle anderen Kombinationen der Indizes verschwindet der Tensor, denn sind zwei Indizes gleich, so ist der Tensor gleich seinem Negativen (Definition 2), also Null. Bemerken Sie, dass bei einer zyklischen Permutation der Indizes der Tensor unverändert bleibt, da diese durch zwei Vertauschungen realisiert werden kann.

Im Folgenden werden wir die Differentialoperatoren in einer abgekürzten Schreibweise verwenden:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Eine weitere bequeme Kurzschreibweise ist die sog. Einsteinsche Summenkonvention. Alle Indizes, die in einem Produkt doppelt auftauchen, sind Summationsindizes, über sie wird also summiert. Dies spart uns das Schreiben der Summenzeichen. Mit dieser Konvention schreibt sich die Divergenz eines Vektorfeldes folgendermaßen:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \partial_i a_i \left(= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \right).$$

Der ε -Tensor ermöglicht es, z. B. das Kreuzprodukt sehr kompakt darzustellen. Die i -te Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist:

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

$$\begin{aligned} \text{z. B. } \left[\vec{a} \times \vec{b} \right]_1 &= \varepsilon_{1jk} a_j b_k \\ &= \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 \quad (\text{alle übrigen Summanden fallen weg!}) \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2. \end{aligned}$$

Ebenso lässt sich natürlich die Rotation eines Vektorfeldes darstellen:

$$[\text{rot } \vec{a}]_i = [\nabla \times \vec{a}]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k.$$

Es ist also

$$\text{div rot } \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j a_k.$$

Diese Summe muss aber Null sein, da ε_{ijk} antisymmetrisch und $\partial_i \partial_j$ symmetrisch ist. In anderen Worten, die Summe besteht aus Paaren von Termen, die sich gegenseitig wegheben ($\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j a_k = -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i a_k$), daher verschwindet die Summe als Ganzes. Also ist notwendigerweise

$$\text{div rot } \vec{a} = 0.$$

Ganz genauso sehen wir, dass

$$[\text{rot grad } \phi]_i = [\nabla \times \nabla \phi]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0.$$

Für ε -Tensoren gilt folgende Summationsregel:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$. Die Gültigkeit dieser Summationsregel macht man sich klar, indem man überlegt, welche Summanden nicht verschwinden. Dies ist nur möglich wenn entweder $i = l$ und gleichzeitig $j = m$ ist oder wenn $i = m$ und gleichzeitig $j = l$ ist. Im letzteren Fall ist auf Grund der Antisymmetrie das Vorzeichen negativ.

Mit dieser Summationsregel können wir einen Ausdruck finden für $\vec{b} \times \text{rot } \vec{a}$:

$$\begin{aligned} \left[\vec{b} \times \text{rot } \vec{a} \right]_i &= \varepsilon_{ijk} b_j \varepsilon_{klm} \partial_l a_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) b_j \partial_l a_m \\ &= b_j \partial_i a_j - b_j \partial_j a_i. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Summation über die Indizes l und m ausgeführt. Wegen der δ -Symbole hat diese Summation jedoch lediglich zur Folge, dass einfach ein positiver Term entsteht, in dem $l = i$ und $m = j$, und ein negativer, in dem $l = j$ und $m = i$ gesetzt wurde.

Es ist also

$$\begin{aligned} & \left[(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} \right]_i \\ & = b_j \partial_j a_i + a_j \partial_j b_i + b_j \partial_i a_j - b_j \partial_j a_i + a_j \partial_i b_j - a_j \partial_j b_i = b_j \partial_i a_j + a_j \partial_i b_j. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\left[\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) \right]_i = \partial_i(a_j b_j) = b_j \partial_i a_j + a_j \partial_i b_j.$$

Also:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b}.$$

7.2 Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystemen

Die beschleunigte Bewegung eines Koordinatensystems setzt sich aus zwei Bewegungsteilen zusammen: einer Translations- und einer Rotationsbewegung. Im Folgenden wollen wir ein rotierendes System betrachten. Das ruhende Koordinatensystem K sei durch die Basisvektoren $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ bestimmt und das rotierende Koordinatensystem K' durch die Basisvektoren $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$. Die Rotation von K' werde beschrieben durch den Rotationsvektor $\vec{\omega}$. Ein Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}'$ hat in den beiden Koordinatensystemen die Darstellung

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \hat{e}'_i.$$

Die Darstellung der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ im rotierenden Koordinatensystem erhalten wir, in dem wir die Zeitableitung

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (x'_i(t) \hat{e}'_i)$$

mithilfe der Produktregel berechnen. Dabei benutzen wir, dass allgemein für einen rotierenden Vektor \vec{a}

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{a}$$

gilt und speziell

$$\dot{\hat{e}}'_i = \vec{\omega} \times \hat{e}'_i.$$

Wir bezeichnen die im ruhenden Koordinatensystem gemessene Geschwindigkeit mit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t) \hat{e}_i$$

und die im rotierenden Koordinatensystem gemessene Geschwindigkeit mit

$$\vec{v}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i(t) \hat{e}'_i$$

und erhalten damit

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Diese Beziehung setzen wir in die allgemeine Form der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V(\vec{r})$$

ein, so dass sich in K'

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}'^2 + m \vec{v}' (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\omega}^2 r^2 - (\vec{\omega} \vec{r})^2) - V(\vec{r})$$

ergibt. Mithilfe der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

können wir nun die Bewegungsgleichung aufstellen. Der erste der beiden Terme in L , die von \vec{v}' abhängig sind, ist leicht abzuleiten. Für den zweiten Term betrachten wir die i -te Komponente und benutzen dafür die kompakte Schreibweise mithilfe des Epsilontensors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v'_i} [\vec{v}' (\vec{\omega} \times \vec{r})] &= \frac{\partial}{\partial v'_i} v'_j [\vec{\omega} \times \vec{r}]_j = \frac{\partial}{\partial v'_i} v'_j \varepsilon_{jkl} \omega'_k x'_l \\ &= \delta_{ij} \varepsilon_{jkl} \omega'_k x'_l = \varepsilon_{ikl} \omega'_k x'_l = [\vec{\omega}' \times \vec{r}]_i. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} = m \vec{v}' + m \vec{\omega} \times \vec{r}$$

und die Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}'} = m \dot{\vec{v}}' + m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + m \vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (91)$$

Für die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach \vec{r} berechnen wir wiederum zunächst die Ableitung des zweiten Terms von L mithilfe des Epsilontensors und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'_i} \vec{v}' (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x'_i} (v'_j \varepsilon_{jkl} \omega'_k x'_l) = \delta_{il} v'_j \varepsilon_{jkl} \omega'_k \\ &= v'_j \varepsilon_{jki} \omega'_k = \varepsilon_{ijk} v'_j \omega'_k = [\vec{v}' \times \vec{\omega}]_i \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= m \vec{v}' \times \vec{\omega} + m \vec{\omega}^2 \vec{r} - m (\vec{\omega} \vec{r}) \vec{\omega} - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ &= -m [\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}. \end{aligned} \quad (92)$$

Mit den beiden Ausdrücken (91) und (92) stellen wir die Bewegungsgleichung auf, die wir so umformen, dass sie der bekannten Newtonschen Form $m\vec{a}' = \vec{F}'$ entspricht. Es ist

$$m\vec{a}' = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (93)$$

Der erste Term der Gl. (93) stellt die wirkende Kraft aus der potentiellen Energie des Systems dar, während die weiteren Terme als Scheinkräfte bezeichnet werden. Eine Translationsbewegung $\ddot{\vec{R}}_{OO'}$ des beschleunigten Koordinatensystems würde noch einen weiteren Term $-m\ddot{\vec{R}}_{OO'}$ auf der rechten Seite der Gl. (93) erzeugen. Eine solche Scheinkraft ist zum Beispiel beim Anfahren oder Anhalten eines Fahrzeugs deutlich spürbar. Der Term $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ ist nur dann ungleich Null, wenn die Rotation nicht gleichförmig erfolgt. Der Ausdruck $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ stellt die Corioliskraft dar. Diese Kraft ist geschwindigkeitsabhängig und wirkt senkrecht zur Drehachse und zum Geschwindigkeitsvektor \vec{v}' . Der Term $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ wird als Zentrifugalkraft oder Fliehkraft bezeichnet. Diese Kraft steht senkrecht auf der Drehachse und ist nach außen gerichtet.

8 Der Hamilton-Formalismus

Ein System mit n Freiheitsgraden wird vollständig durch die Lagrange-Gleichungen (14) beschrieben. Dieses Gleichungssystem aus n Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung lässt sich in ein System aus $2n$ Gleichungen *erster* Ordnung überführen. Dies lässt sich mithilfe der kanonischen Impulse erreichen (Definition in Abschnitt 3.1).

8.1 Die Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation beschreibt den Übergang von den Variablen x und y einer Funktion $f(x, y)$ zu den neuen Variablen $u = \partial f / \partial x$ und y einer neuen Funktion $g(u, y)$. Hierzu betrachten wir das totale Differential der Funktion $f(x, y)$. Es lautet

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

mit

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Für die neue Funktion

$$g = f - ux$$

gilt dann

$$dg = df - u dx - x du = v dy - x du. \quad (94)$$

Dies ist die gesuchte Funktion, die nur noch von den Variablen u und y abhängt:

$$\begin{aligned} g &= g(u, y), \\ dg &= \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial y} dy. \end{aligned} \quad (95)$$

Ein Koeffizientenvergleich der Gln. (94) und (95) ergibt

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{und} \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Die Legendre-Transformation ist auch aus der Thermodynamik bekannt. Hier wird die innere Energie U , die eine Funktion der Zustandsgrößen Entropie S und Volumen V ist, in eine neue Funktion überführt: in die freie Energie F , die von der Temperatur T und dem Volumen V abhängt. Es ist

$$U = U(S, V) \quad \text{mit} \quad dU = TdS - pdV.$$

Wir definieren

$$F = U - TS$$

und es gilt

$$dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV.$$

Ebenso werden die beiden weiteren thermodynamischen Potentiale Enthalpie

$$H = U + pV$$

und freie Enthalpie

$$G = U - TS + pV = F + pV = H - TS$$

eingeführt. Es ist

$$H = H(S, p)$$

und $G = G(T, p).$

8.2 Die Hamiltonschen Gleichungen

Die Lagrange-Funktion hängt von den verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} , den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ und der Zeit t ab, d. h. $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Wir führen eine Legendre-Transformation durch (bis auf das Vorzeichen), um eine Funktion in den Variablen \mathbf{q} und $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ mit $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ zu erhalten:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Das totale Differential der rechten Seite ist

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{j=1}^n \left(\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{j=1}^n (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j.$$

Das totale Differential der Funktion $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ lautet andererseits

$$dH = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{96}$$

sowie

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{97}$$

Die $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung (96) werden **Hamiltonsche Gleichungen** genannt. Sie sind völlig äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen (14).

Beispiel: Dreiatomiges, lineares Molekül

Wir beschreiben die Wechselwirkung der Atome näherungsweise durch Federkräfte mit der Konstante D . Die äußeren Atome haben die Massen m_1 , das innere Atom die Masse m_2 . Wir benutzen kartesische Koordinaten und drücken die kinetische und potentielle Energie als Funktionen in den Koordinaten x_i und den Impulsen p_i ($i = 1, 2, 3$) aus. Es ist

$$T = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2}p_2^2$$

und

$$V = \frac{D}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2].$$

Da ein ruhendes Koordinatensystem vorliegt, gilt

$$H = T + V = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + \frac{D}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2],$$

woraus die kanonischen Gleichungen folgen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -D(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}, & \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -D[(x_2 - x_1) + (x_2 - x_3)] \\ \dot{x}_3 &= \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_1}, & \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -D(x_3 - x_2).\end{aligned}$$

Hieraus folgen die bekannten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1 &= -D(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -D(2x_2 - x_1 - x_3) \\ m_1\ddot{x}_3 &= -D(x_3 - x_2).\end{aligned}$$

8.3 Hamiltonfunktion und Energie

Wir hatten die Hamilton-Funktion bereits im Abschnitt 3.6 über die Energieerhaltung kennengelernt. Dort wurde gezeigt, dass in einem ruhenden Koordinatensystem die kinetische Energie als quadratische Form in den Geschwindigkeiten geschrieben werden kann, siehe Gl. (40). Daraus folgte, dass die Hamiltonfunktion gleich der Gesamtenergie des Systems ist: $H = T + V = E$.

Betrachten wir die totale Ableitung der Hamiltonfunktion nach der Zeit

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}$$

und berücksichtigen dabei Gl. (97), dann erhalten wir die Beziehung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Die Hamiltonfunktion ist demnach genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn H und somit auch L nicht explizit von der Zeit abhängt. Dies hatten wir bereits in Abschnitt 3.6 auf anderem Wege gezeigt.

Die Aussagen „ $H = E$ “ und „ H ist Erhaltungsgröße“ sind zwei völlig unabhängige Sachverhalte, wie die beiden folgenden Beispiele verdeutlichen.

Beispiel für $dH/dt = 0$ und $H \neq E$: Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m befinde sich auf einem geraden Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der x, y -Ebene rotiere. Wir wählen Polarkoordinaten. Die Zwangsbedingung lautet $\phi = \omega t$. Die potentielle Energie verschwindet, daher ist

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) = E.$$

Wir berechnen H als Funktion der Koordinate r und des zugehörigen kanonischen Impulses p_r . Der kanonische Impuls ist

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}.$$

Damit ergibt sich

$$H = p_r\dot{r} - L = \frac{p_r^2}{m} - \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2}r^2\omega^2 = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2}r^2\omega^2.$$

Offensichtlich gilt

$$H \neq E.$$

Da H nicht explizit von der Zeit abhängt, ist

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

die Hamilton-Funktion ist also eine Erhaltungsgröße.

Beispiel für $H = E$ und $dH/dt \neq 0$: Elektron im Plattenkondensator

Ein Elektron bewege sich senkrecht zu den Platten eines Kondensators, dessen Spannung linear mit der Zeit anwächst. Für das (zeitabhängige) Potential gilt

$$V(x, t) = -cxt, \quad c = \text{const.}$$

Es ist

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + cxt,$$

woraus mit $p = m\dot{x}$ folgt

$$H = px - L = \frac{p^2}{2m} - cxt = T + V = E. \quad (98)$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = ct$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = \frac{c}{m}t.$$

Für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ ergibt sich

$$\dot{x}(t) = \frac{c}{2m}t^2 \quad \text{und} \quad x(t) = \frac{c}{6m}t^3.$$

Wir berechnen nun die Energie. Es ist

$$p = m\dot{x} = \frac{c}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{c^2}{8m}t^4$$

und es folgt mit Gl. (98)

$$H = E = \frac{c^2}{8m}t^4 - \frac{c^2}{6m}t^4 = -\frac{c^2}{24m}t^4,$$

also

$$\frac{dH}{dt} \neq 0.$$

9 Das Hamiltonsche Prinzip

Das Hamiltonsche Prinzip liefert einen alternativen Weg zur Herleitung der Hamiltonschen Gleichungen und der Lagrange-Gleichung. Dafür nutzen wir die Variationsrechnung.

9.1 Variationsrechnung

Es sei eine Funktion

$$F = F(y(x), y'(x), x)$$

gegeben, wobei $y'(x) = dy/dx$ bezeichnet. Des Weiteren betrachten wir zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$. Das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx$$

definiert ein *Funktional*. Unter einem Funktional versteht man eine Abbildung von einem Funktionenraum in die reellen Zahlen. Das Integral I weist jeder Funktion $y(x)$ einen Zahlenwert zu.

Die Aufgabenstellung der Variationsrechnung lautet nun, diejenigen Funktionen $y(x)$ mit $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ zu bestimmen, die das Integral I minimieren bzw. maximieren. Diese Aufgabenstellung ist verwandt mit der Differentialrechnung, jedoch wird dort lediglich ein Wert x_0 für eine Variable x gesucht, der eine Funktion extremal macht. In der Variationsrechnung jedoch wird nach einer *Funktion* gesucht, so dass ein *Funktional* extremal wird.

Begründet wurde die Variationsrechnung durch das sogenannte *Brachistochronen-Problem*, welches 1696 von Bernoulli formuliert wurde. Ein Massenpunkt m mit Anfangsgeschwindigkeit Null soll im Gravitationsfeld (die Erdanziehungskraft wirke in positiver y -Richtung) reibungsfrei von P_1 nach P_2 laufen. Gesucht ist diejenige Zwangsfläche, für die die dazu benötigte Zeit t minimal wird. Die Zeit errechnet sich gemäß

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v},$$

wobei ds ein infinitesimales Streckenelement bezeichnet, für das gilt

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

und v die Geschwindigkeit, für die aufgrund des Energiesatzes gilt

$$\frac{m}{2}v^2 = mgy \quad \Longleftrightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Damit ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Gesucht ist diejenige Zwangsbedingung $y(x)$, die t minimiert.

Leonhard Euler (1707–1783) gelang es, das Problem der Variationsrechnung auf Differentialgleichungen zurückzuführen.

Wir bezeichnen die gesuchte Extremale mit $y(x)$. Wir betrachten nun benachbarte Kurven

$$\hat{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x),$$

wobei $\eta(x)$ differenzierbar sein und

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \tag{99}$$

gelten soll. Wir wählen eine beliebige Funktion $\eta(x)$, die nun festgehalten wird, und untersuchen die Abhängigkeit des Funktionals vom Parameter ε :

$$I_\eta(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) dx.$$

Die Funktion $y(x)$ erteilt dem Integral I genau dann ein Extremum, wenn die I_η für alle Funktionen $\eta(x)$ bei $\varepsilon = 0$ ein Extremum haben. Eine notwendige Bedingung hierfür ist, dass die ersten Ableitungen verschwinden:

$$\left. \frac{dI_\eta}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\eta \frac{\partial F}{\partial y} + \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx = 0.$$

Partielle Integration des zweiten Integranden ergibt

$$\left. \frac{dI_\eta}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x) dx + \left[\eta(x) \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Aufgrund der Randbedingungen (99) verschwindet der Randterm. Also ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x) dx = 0$$

für alle Funktionen $\eta(x)$ die notwendige Bedingung dafür, dass $y(x)$ das Integral extremal macht. Dies ist aber genau dann für alle $\eta(x)$ erfüllt, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

ist.

Diese Überlegungen können einfach auf den Fall übertragen werden, dass die Funktion F von mehreren Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ und deren Ableitungen abhängt. Eine notwendige Bedingung für das Extremum des Integrals

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), x) dx$$

wird durch die sog. **Euler-Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (100)$$

gegeben.

Verändern wir die Funktionen $y_i(x)$ um kleine Variationen $\delta y_i(x)$, so ändert sich auch das Integral I . Diese Variation von I bezeichnen wir mit δI und es ist

$$\delta I = \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right] \delta y_i dx.$$

Die Variation δI verschwindet genau dann, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen (100) erfüllt sind.

9.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Ein System wird charakterisiert durch die verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} und die zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$. Angenommen, zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 nehme das System bestimmte Lagen ein, die durch die Koordinatensätze $\mathbf{q}^{(1)}$ und $\mathbf{q}^{(2)}$ beschrieben werden.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen auf eine solche Weise verläuft, dass das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

minimal wird, das bedeutet

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt = 0.$$

Die Funktion L ist die bereits bekannte *Lagrange-Funktion*, das Integral S heißt *Wirkung*. Daher wird das Hamiltonsche Prinzip auch das *Prinzip der kleinsten Wirkung* genannt. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich die im Kapitel 2 hergeleiteten Lagrange-Gleichungen 2. Art als notwendige Bedingung dafür, dass S tatsächlich extremal wird.

Das Hamiltonsche Prinzip begründet somit keine neue Mechanik. Seine Bedeutung liegt vielmehr darin, dass es ein allgemein formuliertes Prinzip in der Physik darstellt, mit dem sich die Lagrange-Gleichungen 1. und 2. Art sowie die Hamilton-Gleichungen herleiten lassen. Auch die Äquivalenz zu den Newtonschen Gleichungen lässt sich zeigen. Darüber hinaus lassen sich Anwendungen in weiteren Bereichen der Physik finden, zum Beispiel können die Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik aus einem Hamilton-Prinzip abgeleitet werden. Die Formulierung

des Hamiltonschen Prinzips ist von den gewählten Koordinaten völlig unabhängig. Für numerische Verfahren ist die Variationsrechnung oftmals günstiger als die Integration der Lagrange-Gleichungen.

10 Die Poisson-Klammern

Eine differenzierbare Funktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ der Variablen $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ und t heißt **Observable** des Systems. Die **Poisson-Klammer** für zwei Observable $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ ist definiert als

$$[f, g]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Die Ableitung einer Observablen nach der Zeit

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

lässt sich unter Anwendung der kanonischen Gleichungen umformen zu

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Mithilfe der Poisson-Klammer können wir diesen Ausdruck sehr einfach schreiben:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Auch Erhaltungssätze lassen sich mit Poisson-Klammern einfach ausdrücken: Eine nicht explizit von der Zeit abhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion verschwindet:

$$f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{const.} \quad \iff \quad [f, H] = 0.$$

Es gilt insbesondere

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = -[p_i, f] \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = [q_i, f]$$

sowie für die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H].$$

Das heißt, wir erhalten mit den Poisson-Klammern eine völlig symmetrische Darstellung der Hamiltonschen Gleichungen.

Aus der Definition lassen sich eine Reihe von Eigenschaften und Rechenregeln ableiten:

(a) Linearität:

$$[c_1 f + c_2 g, h] = c_1 [f, h] + c_2 [g, h]$$

(b) Antisymmetrie:

$$[f, g] = -[g, f]$$

(c) Existenz eines Nullelementes:

$$[c, f] = 0 \quad \text{mit } c = \text{const.}$$

(d) Produktregel:

$$[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$$

(e) Jacobi-Identität:

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

(f) fundamentale Poisson-Klammern:

$$[q_i, q_j] = 0, [p_i, p_j] = 0, [q_i, p_j] = \delta_{i,j}.$$

Mithilfe der Poisson-Klammern und den oben aufgeführten Rechenregeln lassen sich aus der Hamilton-Funktion eines mechanischen Systems leicht die Bewegungsgleichungen herleiten. Die Poisson-Klammern ermöglichen darüber hinaus die Berechnung weiterer Erhaltungsgrößen. Es gilt das **Poissonsche Theorem**:

Sind die Observablen f und g Erhaltungsgrößen, dann ist auch die Poisson-Klammer $[f, g]$ eine Erhaltungsgröße.

Somit lässt sich aus zwei bekannten Erhaltungsgrößen eine weitere finden, sofern die Poisson-Klammer eine neue Observable darstellt.

Innerhalb der klassischen Mechanik dienen die Poisson-Klammern zur Feststellung, ob eine Phasenraumtransformation kanonisch ist (nächstes Kapitel). Darüber hinaus entsprechen sie den Kommutatoren in der Quantenmechanik. Diese Analogie eröffnet die Möglichkeit, die Quantenmechanik auf der klassischen Mechanik aufzubauen.

11 Kanonische Transformationen

Die Hamiltonsche Mechanik hat die Betrachtung auf einen $2n$ -dimensionalen Phasenraum ausgedehnt. Wir wollen nun die Koordinaten \mathbf{q} und \mathbf{p} dieses Phasenraumes als prinzipiell gleichberechtigt ansehen und Koordinatentransformationen in allen diesen Koordinaten vornehmen. Wir suchen nach solchen Transformationen, für die es eine Hamiltonfunktion gibt und die kanonischen Gleichungen gelten. Das heißt, analog dazu, dass der Lagrange-Formalismus unabhängig von der Wahl der unabhängigen Koordinaten ist, suchen wir im nunmehr $2n$ -dimensionalen Koordinatenraum nach solchen Transformationen, die die Gültigkeit des Hamilton-Formalismus erhalten.

11.1 Punkttransformation

Wir beginnen zunächst mit der schon bekannten Transformation der Lagekoordinaten $q_i \rightarrow Q_i(\mathbf{q}, t)$, die auch als Punkttransformation bezeichnet wird. Dabei versuchen wir in der Regel, ein Koordinatensystem zu finden, das am vorteilhaftesten ist, das heißt, das die meisten zyklischen Variablen besitzt oder das möglichst einfache Ausdrücke für T und V liefert.

Die neue Lagrange-Funktion ergibt sich, indem wir die alten Koordinaten entsprechend der Transformationsgleichungen durch die neuen Koordinaten ersetzen:

$$L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t).$$

Wegen ihrer Invarianz bezüglich Koordinatentransformation sind die Lagrange-Gleichungen unverändert gültig. Gleichwohl können die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen gänzlich verschieden aussehen.

Die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion können nicht in dieser Weise durch Einsetzen der neuen Variablen transformiert werden, sondern sie müssen aus der Lagrange-Gleichung in den neuen Koordinaten abgeleitet werden.

Die kanonischen Impulse in den neuen Koordinaten ergeben sich definitionsgemäß aus

$$p_i \rightarrow P_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i}.$$

Damit ist

$$P_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}, t) p_j,$$

wobei a_{ij} die Elemente der Transformationsmatrix

$$a_{ij} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$$

bezeichnen.

In ähnlicher Weise leiten wir die Hamilton-Funktion in den neuen Koordinaten mithilfe der Definition ab:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \rightarrow K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) - L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t).$$

Die Hamiltonschen Gleichungen sind bei Punkttransformationen ebenso wie die Lagrange-Gleichungen forminvariant, so dass gilt

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}.$$

Beispiel: Freies Teilchen im rotierenden Bezugssystem

Ein Teilchen bewege sich ohne Einwirkung eines Potentials in der (x, y) -Ebene. Zur Beschreibung benutzen wir die Polarkoordinaten (r, ϕ) . Wir stellen die Lagrange-Funktion auf, berechnen die kanonischen Impulse sowie die Hamilton-Funktion und die kanonischen Gleichungen im ruhenden und anschließend im rotierenden Koordinatensystem.

a) ruhendes Koordinatensystem (r, ϕ)

Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

und die kanonischen Impulse ergeben sich somit zu

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}.$$

Daraus erhalten wir die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2}.$$

Aus den kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2} & \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= 0 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

b) rotierendes Koordinatensystem (R, Φ)

Wir führen nun eine Koordinatentransformation in ein rotierendes Koordinatensystem (R, Φ) mit den Transformationsgleichungen $R = r$ und $\Phi = \phi + \omega t$ aus. Die transformierte Lagrange-Funktion lautet

$$L' = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2(\dot{\Phi} - \omega)^2)$$

und liefert die kanonischen Impulse

$$P_R = \frac{\partial L'}{\partial \dot{R}} = m\dot{R}, \quad P_\Phi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\Phi}} = mR^2(\dot{\Phi} - \omega).$$

Definitionsgemäß berechnen wir die Hamilton-Funktion im neuen Koordinatensystem zu

$$\begin{aligned} K &= \sum_{R, \Phi} P\dot{Q} - L' \\ &= \frac{P_R^2}{2m} + \frac{P_\Phi^2}{2mR^2} + \omega P_\Phi. \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Wenn wir die neuen Koordinaten lediglich in die alte Hamilton-Funktion einsetzen, so erhalten wir

$$H(R, P_R, P_\Phi) = \frac{P_R^2}{2m} + \frac{P_\Phi^2}{2mR^2}.$$

Aufstellung der kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\partial K}{\partial P_R} = \frac{P_R}{m} & \dot{P}_R &= -\frac{\partial K}{\partial R} = \frac{P_\Phi^2}{mR^3} \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial K}{\partial P_\Phi} = \frac{P_\Phi}{mR^2} + \omega & \dot{P}_\Phi &= -\frac{\partial K}{\partial \Phi} = 0 \end{aligned}$$

führt wiederum zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{R} - R(\dot{\Phi}^2 - 2\omega\dot{\Phi} + \omega^2) &= 0 \\ R\ddot{\Phi} + 2\dot{R}(\dot{\Phi} - \omega) &= 0. \end{aligned}$$

Vergleichen wir diese mit denen im ruhenden Koordinatensystem, so erkennen wir, dass sie sich durch die Transformationsgleichungen ineinander überführen lassen.

11.2 Kanonische Transformationen

Wir wollen nun erweiterte Transformationen betrachten, bei denen die n Ortskoordinaten und die n Impulse als $2n$ gleichberechtigte Variablen angesehen werden.

Eine solche Transformation heißt *Phasenraumtransformation* und wird beschrieben durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}q_i &\rightarrow Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ p_i &\rightarrow P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t).\end{aligned}$$

Die kanonischen Gleichungen sind gegenüber Phasenraumtransformationen nicht notwendig forminvariant. Wir sind daher hier nur an solchen Transformationen interessiert, für die eine Hamilton-Funktion existiert und die kanonischen Gleichungen gelten. Es werden folgende Begriffe definiert: Eine Transformation $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ heißt *kanonoid*, wenn nur für bestimmte Hamilton-Funktionen $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ jeweils eine Funktion $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ existiert, die die kanonischen Gleichungen im neuen Variablensatz liefert. Die Transformation heißt *kanonisch im weiteren Sinne*, wenn es für alle $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ eine solche Funktion $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ im neuen Variablensatz gibt.

Wir betrachten zunächst mit der Abbildung $Q = q, P = \sqrt{p} - q^2$ ein Beispiel für eine kanonoide Phasenraumtransformation. Die Rücktransformation lautet $q = Q, p = (P + Q^2)^2$. Als ersten Fall beschreibe die Hamilton-Funktion die freie Bewegung (d.h. ohne die Wirkung eines Potentials), wobei wir zur Vereinfachung o.B.d.A. die Masse $m = 1$ setzen. Es ergibt sich

$$H = \frac{p^2}{2}$$

mit den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = p \quad \text{und} \quad \dot{p} = 0.$$

Um zu testen, ob die kanonischen Gleichungen auch für die transformierten Koordinaten existieren, berechnen wir \dot{Q} und \dot{P} . Dafür benutzen wir im ersten Schritt die Transformationsgleichungen, anschließend die kanonischen Gleichungen der alten Koordinaten und führen im dritten Schritt die Rücktransformation aus:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{q} = p = (P + Q^2)^2 \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -2qp = -2Q(P + Q^2)^2.\end{aligned}$$

Wenn eine Hamilton-Funktion K für die neuen Koordinaten existiert, dann müssten diese Gleichungen die kanonischen Gleichungen darstellen, das heißt, die entstandenen rechten Seiten der Gleichungen müssten die entsprechenden Ableitungen der neuen Hamilton-Funktion sein. Offenbar ist hier

$$K(Q, P, t) = \frac{1}{3}(P + Q^2)^3,$$

denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial Q} &= (P + Q^2)^2 \cdot 2Q = -\dot{P} \\ \frac{\partial K}{\partial P} &= (P + Q^2)^2 = \dot{Q}.\end{aligned}$$

Als zweiten Fall betrachten wir die Hamilton-Funktion einer vertikalen Bewegung im homogenen Schwerfeld, wobei wiederum o.B.d.A. die Masse $m = 1$ sei. Das Potential lässt sich in allgemeiner Form als $V = aq$ schreiben, so dass

$$H = \frac{p^2}{2} + aq$$

mit den kanonischen Gleichungen

$$\dot{q} = p \quad \text{und} \quad \dot{p} = -a.$$

Wir berechnen wiederum \dot{Q} und \dot{P} mithilfe der Transformationsgleichungen und erhalten

$$\dot{Q} = \dot{q} = p = (P + Q^2)^2 \tag{101}$$

$$\dot{P} = \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -\frac{a}{2\sqrt{p}} - 2qp = -\frac{a}{2}(P + Q^2)^{-1} - 2Q(P + Q^2)^2. \tag{102}$$

Ob in diesem Falle eine Hamilton-Funktion K existiert, ist nicht mehr so offensichtlich. Daher bedienen wir uns des Satzes von Schwartz, wonach

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q}.$$

Wir nehmen an, es gäbe eine Hamilton-Funktion mit

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad \text{und} \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}. \tag{103}$$

Dann müsste die partielle Ableitung der ersten Gleichung in (103) nach Q und die negative partielle Ableitung der zweiten Gleichung nach P auf gleiche Ausdrücke führen. Die Ausführung der Ableitungen in (101) und (102) liefert aber

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Q}\dot{Q} &= 4Q(P + Q^2) \\ -\frac{\partial}{\partial P}\dot{P} &= -\frac{a}{2}(P + Q^2)^{-2} + 4Q(P + Q^2),\end{aligned}$$

was offensichtlich ungleich ist. Das heißt, für diese Bewegung finden wir in den neuen Koordinaten keine Hamilton-Funktion K , die gültige kanonische Gleichungen liefert. Im ersten Fall der freien Bewegung hatten wir jedoch eine Hamilton-Funktion gefunden, so dass es also für bestimmte Hamilton-Funktionen H auch für

die neuen Koordinaten Hamilton-Funktionen K gibt. Die Transformation ist somit kanonoid.

Der Nachweis, dass eine Funktion kanonoid ist, kann somit „einfach“ dadurch erfolgen, dass wir jeweils ein Beispiel für eine existierende und ein Beispiel für eine nicht-existierende Hamilton-Funktion finden. Die Frage ist nun, ob sich eine allgemeine Bedingung angeben lässt, ob eine Phasenraumtransformation kanonisch ist, da ja nicht alle beliebigen Hamilton-Funktionen durchprobiert werden können. Dazu nutzen wir die Äquivalenz von Hamiltonschen Gleichungen und Hamiltonschem Prinzip. Aufgrund dessen muss gelten: Eine Transformation ist kanonisch, wenn für alle Zeiten t_1 und t_2 und alle Hamilton-Funktionen H aus der Gleichung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt = 0$$

die Gleichung

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \right] dt = 0$$

folgt.

Diese Beziehung wird erfüllt, wenn sich die beiden Integranden nur um einen konstanten Faktor c (mit $c \neq 0$) und das totale Differential einer beliebigen Funktion $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ unterscheiden. Das bedeutet, eine Transformation ist genau dann kanonisch (im weiteren Sinne), wenn ein solcher Faktor c und eine Funktion F existieren, so dass

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = c \left[\sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K \right] + \frac{d}{dt} F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) \quad (104)$$

erfüllt wird. Eine Transformation heißt *eingeschränkt kanonisch* oder *kanonisch im engeren Sinne*, wenn der Faktor $c = 1$ ist. Durch die Ersetzung $Q_i \rightarrow cQ_i$, $P_i \rightarrow P_i$ und $K \rightarrow cK$ kann die Konstante auf 1 transformiert werden, so dass wir die weiteren Betrachtungen auf $c = 1$ beschränken können.

Beispiel für eine kanonische Transformation

Die Transformationgleichungen seien $Q = p$ und $P = q$. Für die ursprünglichen Koordinaten gelten die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Wir definieren die Hamilton-Funktion für die transformierten Koordinaten als

$$K(Q, P, t) = -H(q(P), p(Q), t).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial K}{\partial P} = -\frac{\partial H}{\partial P} = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} = -\frac{\partial H}{\partial q} \cdot 1 = \dot{Q}$$

und analog

$$-\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial p} \cdot 1 = \dot{P}.$$

Das bedeutet, es lässt sich für jede beliebige Hamilton-Funktion H eine transformierte Funktion K angeben, für die die Hamiltonschen Gleichungen erfüllt sind. Die Transformation ist somit kanonisch im weiteren Sinne. Wir suchen nun die Funktion F und den Faktor c , um zu überprüfen, ob die Transformation auch kanonisch im engeren Sinne ist. Dazu formen wir zunächst linke und rechte Seite der Gl. (104) derart um, dass sie nur noch von den Variablen q und p abhängen. Für die linke Seite ergibt sich

$$[p\dot{q} - H] - c[P\dot{Q} - K] = p\dot{q} - cqp + (1+c)H$$

und für die rechte Seite

$$\frac{d}{dt}F(q, p, t) = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Da q und p voneinander unabhängig sind, können wir einen Koeffizientenvergleich bezüglich \dot{q} und \dot{p} vornehmen und erhalten damit

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = -cq.$$

Ableitung beider Beziehungen nach der jeweils anderen Variablen führt auf

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} = -c.$$

Wir erhalten somit $c = -1$, die Transformation ist also nicht kanonisch im engeren Sinne. Die Funktion F lautet $F(q, p, t) = qp$. Demgegenüber ist die Transformation $Q = p, P = -q$ auch kanonisch im engeren Sinne.

11.3 Die Erzeugende

Im Folgenden betrachten wir die Funktion F näher. F hängt von $4n$ Variablen ab: dem alten und dem neuen Variablensatz. Von diesen sind jedoch nur $2n$ unabhängig voneinander (im obigen Beispiel war $F = F(q, p)$). Damit ergeben sich sechs Darstellungsmöglichkeiten der Funktion:

$$\begin{aligned} F_1(q, Q, t), \quad F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t), \\ F_4(p, P, t), \quad F_5(q, p, t), \quad F_6(Q, P, t). \end{aligned}$$

Die Varianten F_5 und F_6 enthalten nur die alten bzw. die neuen Variablen, sie enthalten somit keine Aussagen über die vorgenommene Transformation. Die Formen F_1 bis F_4 heißen *Erzeugende*. Sie beschreiben die zugehörige kanonische Transformation eindeutig. Sie hängen jeweils von n neuen und n alten Variablen ab. Dabei muss es sich um voneinander unabhängige Variablen handeln. Das bedeutet, dass es zu jeder kanonischen Transformation mehrere Erzeugende geben kann, es muss aber nicht alle vier geben. Zum Beispiel existiert für eine Punkttransformation keine Erzeugende $F_1(q, Q, t)$. Existiert eine Erzeugende F_1 , so wird die Transformation „vom Typ 1“ genannt (entsprechend für die weiteren drei Erzeugenden). Gibt es zu einer Transformation mehrere Erzeugende, so gehört diese Transformation gleichzeitig zu mehreren Typen.

Wir wollen uns nun am Beispiel der Erzeugenden F_1 davon überzeugen, dass wir aus dieser die Transformationsgleichungen ableiten können. Wir bilden zunächst die totale Ableitung von $F_1(q, Q, t)$ nach der Zeit

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

und setzen sie in die Bedingung (104) ein, die gelten muss, wenn die Transformation kanonisch ist:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n \left(P_i \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) - K + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten q und Q sind auch deren Ableitungen \dot{q} und \dot{Q} voneinander unabhängig. Die Koeffizienten vor den Ableitungen in der Gleichung müssen deshalb auf der linken und rechten Seite gleich sein. Mithilfe eines Koeffizientenvergleichs erhalten wir

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Aus der Erzeugenden lassen sich somit die fehlenden Koordinaten ableiten und umgekehrt. Der Vorteil der Erzeugenden besteht darin, dass es sich nur um eine einzelne Funktion handelt gegenüber $2n$ Transformationsgleichungen. Analoge Formeln lassen sich auch für die Erzeugenden F_2 , F_3 und F_4 finden. Sofern die jeweiligen Erzeugenden existieren, lassen sie sich durch Legendre-Transformationen ineinander überführen.

Die Bedeutung kanonischer Transformationen liegt weniger in der Berechnung der Bewegung mechanischer Systeme. Sie bieten in der Regel keine Vereinfachung dieser Berechnung, da die neuen Variablen oft nicht anschaulich und intuitiv sind und die Berechnung der Transformation letztlich genauso aufwendig ist wie die Lösung in den alten Variablen. Die Bedeutung besteht vielmehr darin, dass die kanonischen Transformationen die Basis für die statistische Mechanik und die Schrödingersche Wellenmechanik bilden. Sie stellen die Grundlage für die Hamilton-Jacobi-Theorie dar. Dabei werden solche Transformationen gesucht, für die sämtliche Ortskoordinaten Q_i und sämtliche Impulskoordinaten P_i Erhaltungsgrößen sind, was die Problemlösung auf eindimensionale Integrationen zurückführt.

12 Kanonische Invarianten

Per Definition bleiben die Hamiltonschen Gleichungen bei einer kanonischen Transformation invariant. Wir wollen nun weitere Invarianten kennenlernen.

12.1 Fundamentale Poisson-Klammern

Bei einer kanonischen Transformation bleiben die fundamentalen Poisson-Klammern invariant, so dass auch in den neuen Koordinaten

$$[Q_i, Q_j]_{q,p} = 0, [P_i, P_j]_{q,p} = 0, [Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}$$

gilt. Mehr noch: Eine Transformation ist genau dann kanonisch (im engeren Sinne), wenn die fundamentalen Poisson-Klammern invariant sind. Damit ergibt sich eine einfache Möglichkeit, um eine Transformation daraufhin zu überprüfen, ob sie kanonisch ist. Im Beispiel aus dem vorigen Kapitel $Q_i = p_i$ und $P_i = q_i$ ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} [Q_i, P_j]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n -\delta_{ik} \delta_{jk} = -\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Das heißt, die Transformation ist nicht kanonisch im engeren Sinne. Demgegenüber ergibt sich für die Transformation $Q_i = p_i$ und $P_i = -q_i$

$$\begin{aligned} [Q_i, P_j]_{q,p} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n -\delta_{ik} (-\delta_{jk}) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Diese Transformation ist daher kanonisch im engeren Sinne.

12.2 Phasenvolumen

Bei einer kanonischen Transformation verändern sich zwar die Grenzen, nicht aber das eingeschlossene Volumen, so dass gilt:

$$\int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n = \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n.$$

Zum Beweis dieser Beziehung benötigen wir die Definition der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und führen die Abkürzung

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}$$

ein.

Für das Phasenvolumen in den neuen Koordinaten gilt allgemein

$$\int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n = \int \dots \int D dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $D = 1$.

Funktionaldeterminanten können wie ein Bruch behandelt werden. Vertauschung zweier Variablen oder zweier Funktionen ergibt einen Faktor -1 . Wir „erweitern“ D , indem wir „Zähler“ und „Nenner“ durch $\partial(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)$ teilen, und erhalten

$$D = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)}.$$

Nun vertauschen wir in der linken Determinante die ersten n Zeilen mit den letzten n Zeilen

$$D = (-1)^n \frac{\partial(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)} / \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n)}.$$

Stehen in einer Funktionaldeterminante gleiche Größen in „Zähler“ und „Nenner“ übereinander, so reduziert sich die Determinante auf die übrigen Variablen, wobei die gestrichenen Variablen konstant gehalten werden. Das bedeutet

$$D = (-1)^n \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \Big|_{Q=\text{konst}} / \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(Q_1, \dots, Q_n)} \Big|_{q=\text{konst}}.$$

Wir betrachten nun jeweils das i -te Element in der j -ten Zeile und benutzen die Bestimmungsgleichung aus der Erzeugenden F_1 . Für die linke Determinante ergibt sich

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}$$

und für die rechte

$$\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} = \frac{\partial}{\partial Q_i} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_i \partial q_j}.$$

Das bedeutet, die beiden Determinanten unterscheiden sich nur darin, dass die Zeilen und Spalten vertauscht sind, was für die Berechnung der Determinante keine Rolle spielt, und um den Vorfaktor $(-1)^n$. Wir erhalten also

$$D = (-1)^n \cdot (-1)^n = 1$$

und haben damit die Invarianz des Phasenvolumens bewiesen.

Die Invarianz des Phasenvolumens ist eine wichtige Eigenschaft beim Übergang zur statistischen Mechanik, insbesondere beim Übergang von der Verteilungsfunktion von Mikrozuständen zum thermodynamischen Makrozustand.